PROJECTIEVE EN EUCLIDISCHE MEETKUNDE

F.D. Veldkamp
en
G.J. Schellekens

Mathematisch Instituut der
Rijksuniversiteit Utrecht.
Nieuwe uitgave 1973.

PROJECTIEVE EN EUCLIDISCHE MEETKUNDE

F.D. Veldkamp

en

G.J. Schellekens

INHOUD

blz.

§ 1. Het projectieve vlak.......................... 3
§ 2. Algebraïsche definitie van projectieve vlakken..... 5
§ 3. Collineaties en projectiviteiten.................. 9
§ 4. Harmonische ligging.............................. 18
§ 5. Basispunten...................................... 22
§ 6. Dualiteit.. 24
§ 7. Projectiviteiten en lineaire afbeeldingen......... 29
§ 8. Projectieve coördinaten op de rechte.............. 32
§ 9. Collineaties en semilineaire afbeeldingen......... 39
§10. Dualiteiten en polariteiten....................... 47
§11. Kegelsneden...................................... 54
§12. Lijnkegelsneden.................................. 63
§13. Projectiviteiten tussen kegelsneden............... 65
§14. Het affiene vlak. Affiene kegelsneden............. 70
§15. Het reële vlak. Complexificatie.................. 78
§16. Het aequiforme vlak. Cirkels..................... 84
§17. Het euclidische vlak. Spiegelingen................ 96
§18. Orientatie van de reële projectieve rechte........ 108
§19. Niet-euclidische meetkunde........................ 119
§20. Axiomatiek....................................... 130
Aanhangsel: Halflineaire algebra...................... 141
Antwoorden en oplossingen............................. 151

Literatuur:

Coxeter, Introduction to Geometry.
Baer, Linear Algebra and Projective Geometry.
Vebben en Young, Projective Geometry.

Tentameneisen.

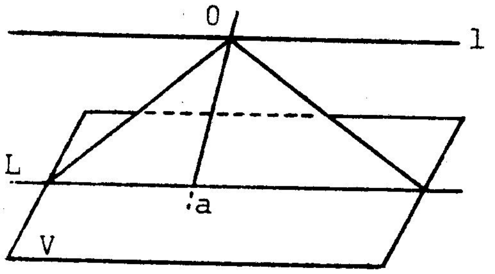
Projectieve en euclidische Meetkunde (3 semesteruren): volledige inhoud van deze syllabus, met inbegrip van de opgave.

Projectieve Meetkunde (2 semesteruren): §1 t/m §16, uitgezonderd hetgeen betrekking heeft op meetkunde over een coördinatenlichaam dat niet-commutatief is of karakteristiek 2 heeft, en de groepentheoretische resultaten, met name in (7.4),(9.6),(9.7),(9.8),(10.7) (10.8),(14.3),(14.6),(16.15) en opgaven 3.2, 5.4, 10.2, 10.3, 10.4.

Aanvulling PM tot PEM (1 semesteruur): §15 t/m §20, en bovengenoemde voor PM uitgezonderd theorie en opgaven.

§ 1. Het projectieve vlak.

Wij beginnen met een aanschouwelijke, niet exacte, inleiding waarin wij vastknopen aan de euclidische meetkunde. In het euclidische vlak hebben twee punten altijd een verbindingslijn, twee lijnen hoeven echter geen snijpunt te hebben-zij kunnen ook evenwijdig zijn. Dit geeft aanleiding tot talloze uitzonderingsgevallen in de formulering en het bewijs van stellingen. In deze toestand kan men verbetering trachten te brengen door aan evenwijdige lijnen een snijpunt toe te kennen, het "oneindig verre" of "oneigenlijke" punt van die lijnen. Al die punten liggen dan op één "oneigenlijke" lijn. Wij lichten dit toe aan de hand van het schoofmodel. Wij denken een euclidisch vlak V ingebed in de euclidische ruimte. De schoof van een punt 0 is de verzameling van alle lijnen en vlakken door 0. Wij kiezen dit punt 0 buiten V. Aan een punt a van V voegen wij de lijn door 0 en a toe, aan een lijn L in V het vlak door 0 en L. Op die manier hebben wij een 1-1 correspondentie (bijectie) tot stand gebracht tussen de punten in V en de lijnen door 0 die niet evenwijdig V zijn, $\nparallel V$, en tussen de lijnen in V en de vlakken door o, $\nparallel V$. Ligt een punt a op een lijn L in V, dan ligt de corresponderende lijn oa in het vlak oL en omgekeerd. Noemen wij een punt en een lijn in V incident, als het punt op de lijn ligt, en analoog een lijn door o incident met een vlak door o als de lijn in het vlak ligt, dan beantwoordt aan incidentie in V dus incidentie in de schoof door o.



Figuur 1.

De lijnen en vlakken door o, $\nparallel V$, vormen een model van het vlak V - als wij afzien van verdere structuur in V, zoals orde, afstand, hoek. Aan een lijn l door o evenwijdig V, $l \parallel V$,

beantwoordt een stelsel evenwijdige lijnen in V: immmers de vlakken door l, ∦ V, zijn juist de vlakken door o die corresponderen met de lijnen in V die // l zijn. Het ligt dus voor de hand l te beschouwen als oneigenlijk snijpunt van dat stelsel evenwijdige rechten. Alle lijnen door o, // V, liggen in het vlak door o dat // V is. Wij vatten dat vlak op als oneigenlijke rechte; (de term "rechte" vervangt in deze samenhang de uitdrukking (rechte) lijn).

De complete schoof van lijnen en vlakken door o levert ons dus een nieuw soort vlak, het projectieve vlak. PUNTEN in dat vlak zijn per definitie lijnen door o, RECHTEN in dat vlak zijn vlakken door o. Een PUNT is incident met een RECHTE als de corresponderende lijn in het corresponderende vlak ligt.

Dit projectieve vlak bezit de volgende eigenschappen (wij schrijven nu weer punt i.p.v. PUNT, rechte i.p.v. RECHTE):

A. Twee verschillende punten incideren met precies één rechte.
A*. Twee verschillende rechten incideren met precies één punt.
B. Op elke rechte liggen tenminste drie punten.
C. Er zijn een rechte en een punt die niet incideren.

Merk op dat hier geen sprake meer is van oneigenlijke punten en rechten. Hebben wij eenmaal het projectieve vlak geconstrueerd met het schoofmodel, dan kunnen wij het oorspronkelijke euclidische vlak V vergeten. Nemen wij door o een willekeurig vlak V', en kiezen wij V // V', dan correspondeert V' met de oneigenlijke rechte van V. Dit betekent dat wij uit het projectieve vlak een willekeurige rechte kunnen wegsnijden: wat overblijft heeft dan de eigenschappen van een euclidisch vlak, voorzover het gaat over punten, lijnen, incidentie en evenwijdigheid. Wij noemen zoiets een affien vlak. Dus:

Een affien vlak kan door toevoeging van oneigenlijke punten en een oneigenlijke rechte uitgebreid worden tot een projectief vlak. Laten wij omgekeerd uit een projectief vlak een willekeurige rechte weg, dan blijft er een affien vlak over.

In deze paragraaf is het projectieve vlak gedefinieerd uitgaande van de euclidische meetkunde. Aangezien we de axiomatische fundering daarvan niet bekend kunnen veronderstellen, is dit een onbevredigende manier van doen. Wij zullen daarom in §2 een algebraische definitie geven, geïnspireerd door het schoofmodel. Op de eigenschappen A, A*, B, C zullen we in §20 terugkomen bij de axiomatiek.

Opgaven.

1.1.(i) In hoeveel delen wordt het projectieve vlak verdeeld door een rechte, (ii) in hoeveel door twee rechten?

1.2. Beschouw de volgende eigenschap:

A*'. Twee rechten zijn incident met tenminste één punt.
Laat zien dat de grondeigenschappen A en A* ekwivalent zijn met A en A*'.

1.3.(i) Geef een voorbeeld van een meetkunde, die aan A, A* en C voldoet, maar niet aan B. (ii) Ook één, die aan A, A* en B voldoet, maar niet aan C.

1.4. Beschouw een meetkunde die aan A, A*, B en C voldoet. Bewijs dat met elk punt tenminste drie rechten incideren.

1.5. Beschouw een meetkunde die aan A, A*, B en C voldoet met de eigenschap: er is een rechte l waarmee precies n punten incideren (dus $n \geq 3$).

Bewijs:

a. Met elk punt a niet op l incideren precies n rechten.

b. Met iedere rechte incideren precies n punten.

c. Door ieder punt gaan precies n rechten.

d. Er zijn in totaal $n^2 - n + 1$ punten en evenveel rechten in deze meetkunde.

§2. Algebraïsche definitie van projectieve vlakken.

Denken wij nog even terug aan het schoofmodel. Neem een willekeurige 3-dimensionale vectorruimte R met oorsprong 0. Een lijn door 0 is dan een 1-dimensionale lineaire deelruimte, een vlak door 0 een 2-dimensionale lineaire deelruimte. Een 1- of 2-dimensionale deelruimte stelt dus een punt resp. een lijn van het projectieve vlak voor. O = {0} is de lege deelruimte van het projectieve vlak, R het "hele" vlak. Wij kunnen hierbij uitgaan van een vectorruimte over een willekeurig, al dan niet commutatief lichaam (dus niet noodzakelijkerwijs over het lichaam van de reële getallen IR). Eenvou-

digheidshalve beperken wij ons in het vervolg tot commutatieve lichamen, hoewel dat voor een deel van de theorie niet noodzakelijk is. Wel zullen we telkens aangeven wat er in het niet commutatieve geval gebeurt.

(2.1) Definitie.
Zij K een lichaam, R een K-vectorruimte, $\dim_K R = 3$. Het projectieve vlak $\mathbb{P}R$ is de verzameling van alle lineaire deelruimten van R, met de incidentierelatie gegeven door:

L en M zijn incident, geschreven $L|M \Leftrightarrow L \subset M$ of $L \supset M$.

Een 1-dimensionale lineaire deelruimte heet (projectief) punt; een 2-dimensionale lineaire deelruimte heet (projectieve) rechte; K heet het coördinatenlichaam, R de coördinatenruimte van $\mathbb{P}R$.

De door $x_1,\dots,x_k \in R$ opgespannen lineaire deelruimte schrijven wij: $\lceil x_1,\dots,x_k\rceil = Kx_1 + \dots + Kx_k = \sum_{i=1}^{k} Kx_i = \{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \mid \ulcorner\lambda_1,\dots,\lambda_k\urcorner \in K^k\}$.

Is L een projectief punt, dan is L bepaald door een willekeurige $x \in L$, $x \neq o$, dus $L = \lceil x\rceil$.
Merk op dat $\lceil x\rceil = \lceil y\rceil$ dan en slechts dan als x en y lineair afhankelijk zijn (als er een $\lambda \neq 0$ in K is zodat $y = \lambda x$).
Zijn $\lceil x\rceil$ en $\lceil y\rceil$ twee verschillende punten, dan bevat de rechte $\lceil x,y\rceil$ door $\lceil x\rceil$ en $\lceil y\rceil$ alle punten $\lceil\lambda x + \mu y\rceil$ met $\lambda,\mu\in K$ niet beide 0.
Omdat x en y nu onafhankelijk zijn, $\lceil x\rceil \cap \lceil y\rceil = O$, kunnen we deze schrijven als directe som $\lceil x,y\rceil = \lceil x\rceil \oplus \lceil y\rceil$. Dit voorkomt verwarring met het punt $\lceil x+y\rceil$.
Kiezen wij in R een basis e_0, e_1, e_2 en schrijven wij

$$x = \xi_0 e_0 + \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 = \ulcorner\xi_0,\xi_1,\xi_2\urcorner,$$ dan geven wij $\lceil x\rceil$ ook wel aan door $\lceil \xi_0,\xi_1,\xi_2\rceil$.

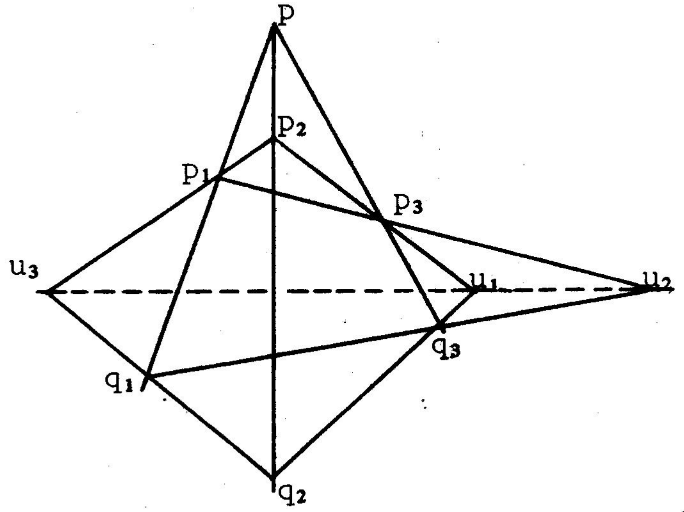
Ga na dat de in (2.1) gedefinieerde projectieve vlakken de eigenschappen A,A*, B, C van § 1 hebben.

Een stel punten dat op één rechte ligt heet collineair; een stel rechten dat door één punt gaat heet concurrent.

Een driehoek is een niet-collineair 3-tal punten p_1, p_2, p_3 (de hoekpunten; hun verbindingsrechten $p_1 \oplus p_2$, $p_2 \oplus p_3$, $p_3 \oplus p_1$ heten de zijden).

Wij beschouwen nu twee driehoeken, p_1, p_2, p_3 en q_1, q_2, q_3. Deze driehoeken heten puntperspectief, als er een punt r bestaat zodat voor i = 1,2,3 geldt: p_i, q_i en r liggen op één rechte, m.a.w. $p_1 \oplus q_1$, $p_2 \oplus q_2$, $p_3 \oplus q_3$ zijn concurrent; r heet het centrum van puntperspectiviteit. Liggen de drie punten $(p_1 \oplus p_2) \cap (q_1 \oplus q_2)$, $(p_2 \oplus p_3) \cap (q_2 \oplus q_3)$ en $(p_3 \oplus p_1) \cap (q_3 \oplus q_1)$ op één rechte L, m.a.w. zijn de snijpunten van overeenkomstige zijden collineair, dan noemt men de driehoeken lijnperspectief; L heet de as van lijnperspectiviteit. Wij bewijzen nu

(2.2) D. Stelling van DESARGUES. Zijn twee driehoeken puntperspectief, dan zijn ze ook lijnperspectief.



Figuur 2.

Bewijs: Veronderstel de driehoeken p_1, p_2, p_3 en q_1, q_2, q_3 puntperspectief met centrum r. Laat $p_i = \lceil a_i \rceil$, $q_i = \lceil b_i \rceil$, $r = \lceil c \rceil$. Dan is $c = \alpha_1 a_1 + \beta_1 b_1 = \alpha_2 a_2 + \beta_2 b_2 = \alpha_3 a_3 + \beta_3 b_3$, dus

$d_1 = \alpha_2 a_2 - \alpha_3 a_3 = -\beta_2 b_2 + \beta_3 b_3 \in (p_2 \oplus p_3) \cap (q_2 \oplus q_3) = u_1$

$d_2 = \alpha_3 a_3 - \alpha_1 a_1 = -\beta_3 b_3 + \beta_1 b_1 \in (p_3 \oplus p_1) \cap (q_3 \oplus q_1) = u_2$

$d_3 = \alpha_1 a_2 - \alpha_2 a_1 = -\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 \in (p_1 \oplus p_2) \cap (q_2 \oplus q_1) = u_3$

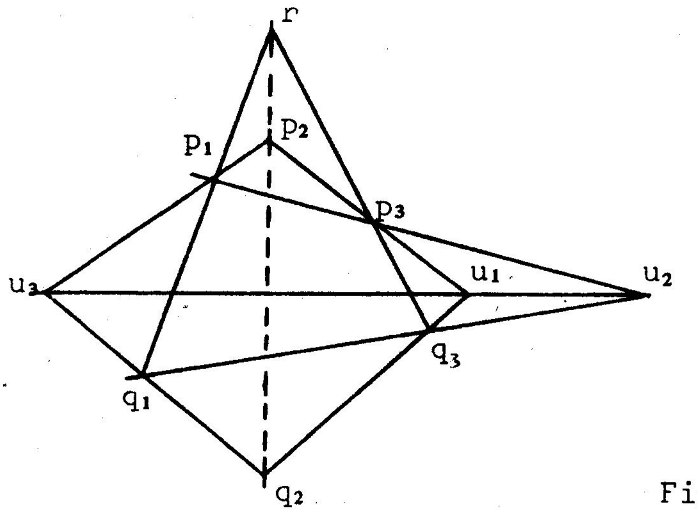
Omdat p_1, p_2, p_3 niet collineair, dus a_1, a_2, a_3 onafhankelijk zijn, en evenzo b_1, b_2, b_3 zou uit bv. $d_1 = 0$ volgen $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 = 0$, $c = 0$. Dus $d_i \neq 0$, $u_i = \lceil d_i \rceil$, Nu is $d_1 + d_2 + d_3 = 0$, dus zijn u_1, u_2, u_3 collineair.

Opmerking. De stelling van Desargues geldt ook in een projectief vlak over een niet commutatief coördinatenlichaam.

Uit de stelling van Desargues leidt men gemakkelijk de omgekeerde stelling af, te weten

(2.3) <u>Zijn twee driehoeken lijnperspectief, dan zij ze ook puntperspectief.</u>

<u>Bewijs</u>. Laat p_1, p_2, p_3 en q_1, q_2, q_3 de twee lijnperspectieve driehoeken zijn: $u_1 = (p_2 \oplus p_3) \cap (q_2 \oplus q_3)$, $u_2 = (p_3 \oplus p_1) \cap (q_3 \oplus q_1)$ en $u_3 = (p_1 \oplus p_2) \cap (q_1 \oplus q_2)$ liggen op één rechte. Bekijk nu de driehoeken p_1, q_1, u_3 en p_3, q_3, u_1. Deze zijn puntperspectief vanuit u_2, dus volgens de stelling van Desargues zijn ze lijnperspectief. Dat betekent dat het snijpunt van $p_1 + q_1$ en $p_3 \oplus q_3$ op één rechte ligt met p_2 en q_2. Daarmee zijn wij klaar.



Figuur 3.

p_1	q_1	r	De desargues-configuratie, bestaande uit
p_2	q_2	r	de 10 punten $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3, r, u_1, u_2, u_3$,
p_3	q_3	r	geordend in nevenstaande 10 collineaire 3-tallen,
p_1	p_2	u_3	bezit een volledige symmetrie:
q_1	q_2	u_3	Ieder van de punten kan als perspectiviteitscentrum
p_2	p_3	u_1	opgevat worden, de perspectiviteitsas is dan
q_2	q_3	u_1	eenduidig bepaald (deze bevat de 3 punten,
p_3	p_1	u_2	die niet tot een van de 3-tallen behoren, die het
q_3	q_1	u_2	centrum bevatten). Uit de collineariteit van 9
u_1	u_2	u_3	van de 3-tallen volgt die van het 10e.

Opgaven.

2.1.(i) Schrijf alle punten in coördinaten uit van het projectieve vlak over $\mathbb{F}_2$, het lichaam met twee elementen.(ii) Doe hetzelfde voor het lichaam $\mathbb{F}_3$, met drie elementen. Let er op, niet twee maal eenzelfde punt op te schrijven ! Vergelijk met opgave 1.5.

2.2. Laat zien dat een projectief vlak als gedefinieerd in (2.1) de eigenschappen A,A*, B, C **van § 1 heeft.** Denk aan GRASSMAN: $\dim(S+T) + \dim(S\cap T) = \dim S + \dim T$.

2.3. (i) Leid de stelling van Desargues (2.2) uit zijn omgekeerde (2.3) af.

2.3. (ii) Geef voor elk van de 10 punten van de Desargues-configuratie de twee driehoeken uit de configuratie, die uit dit punt perspectief zijn, en hun perspectiviteitsas.

2.4. (i) Toon aan dat $\lceil 3,5,1\rceil, \lceil 4,0,7\rceil, \lceil 5,3,5\rceil$ collineair zijn.
2.4. (ii) Bepaal $(\lceil 1,5,-2\rceil \oplus \lceil 4,3,-1\rceil) \cap (\lceil 2,-1,3\rceil \oplus \lceil 2,2,3\rceil)$.

2.5. Ga na dat de driehoeken $p_1 = \lceil 1,0,0\rceil$, $p_2 = \lceil 0,1,0\rceil$, $p_3 = \lceil 0,0,1\rceil$ en $q_1 = \lceil \alpha,1,1\rceil$, $q_2 = \lceil 1,\beta,1\rceil$, $q_3 = \lceil 1,1,\gamma\rceil$ perspectief zijn uit $\lceil 1,1,1\rceil$. Bepaal u_1, u_2, u_3 en toon aan dat dit 3-tal collineair is.

2.6. Bewijs dat de meetkunde uit opgave 1.5 met n = 3 aan Desargues voldoet.

§3. Collineaties en projectiviteiten.

We beschouwen een bijectie (1-1 afbeelding op) $\phi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ van projectieve vlakken $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$, die incidentie behoudt, d.w.z. $L|M \Rightarrow \phi L|\phi M$ voor alle $L,M \in \mathcal{P}$. Is $p \in \mathcal{P}$ een punt, dan kan $\phi p \in \mathcal{P}'$ een punt of een rechte zijn. Een rechte $L|p$ gaat in het eerste geval over in een rechte $\phi L|\phi p$, en een punt $q|L$ weer in een punt $\phi q|\phi L$, dus ϕ beeldt alle punten op punten af (wegens A), en dan ook alle rechten op rechten. In het andere geval gaan alle punten in rechten en alle rechten in punten over.

(3.1) Definitie.

Een collineatie resp. correlatie van een projectief vlak $\mathcal{P}$ op een projectief vlak $\mathcal{P}'$ is een bijectie $\phi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ waarvoor geldt:

$L|M \Leftrightarrow \phi L|\phi M$ voor alle $L,M \in \mathcal{P}$, en

$\dim \phi L = \dim L$ resp. $\dim \phi L + \dim L = 3$ voor alle $L \in \mathcal{P}$.

Een lineaire transformatie $A \in GL(R)$ (d.w.z. $A : R \to R$ 1-1 lineair òp) geeft ons een collineatie $\lceil A \rceil$ van $\mathcal{P}R$ op zich, door te stellen $\lceil A \rceil L = AL$ (ga na). Er zijn ook andere, bv. $L \mapsto \overline{L} = \{\overline{x} | x \in L\}$ (complexe conjugatie van lineaire deelruimten) is een collineatie van $\mathcal{P}\mathbb{C}^3$.
Een voorbeeld van een correlatie is de afbeelding $L \to L^{\perp} = \{y | (x|y) = 0 \text{ voor alle } x \in L\}$ (orthoplement van lineaire deelruimten) voor $P\mathbb{R}^3$ (met inproduct) of $P\mathbb{C}^3$ (unitair).

Door de beelden van de punten is een collineatie (correlatie) ϕ vastgelegd. Laat ϕ_1 de beperking van ϕ tot de verzameling punten van P zijn, dan geldt voor elk 3-tal punten

p,q,r collineair $\Rightarrow \phi p, \phi q, \phi r$ collineair (concurrent).

Omgekeerd geldt ook

(3.2) Is ϕ_1 een bijectie van de verzameling punten van $\mathcal{P}$ op de verzameling punten (rechten) van $\mathcal{P}'$, waarvoor geldt

p,q,r collineair $\Leftrightarrow \phi_1 p, \phi_1 q, \phi_1 r$ collineair (concurrent)

voor elk 3-tal punten $p,q,r \in \mathcal{P}$,

dan is ϕ_1 de restrictie van een collineatie (correlatie) $\phi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$.

Overeenkomstige uitspraken gelden voor de restrictie ϕ_2 van ϕ tot de verzameling rechten.

In (3.1) kan de eis dat ϕ bijectief is verzwakt worden tot ϕ_1 of ϕ_2 surjectief (afbeelding òp):

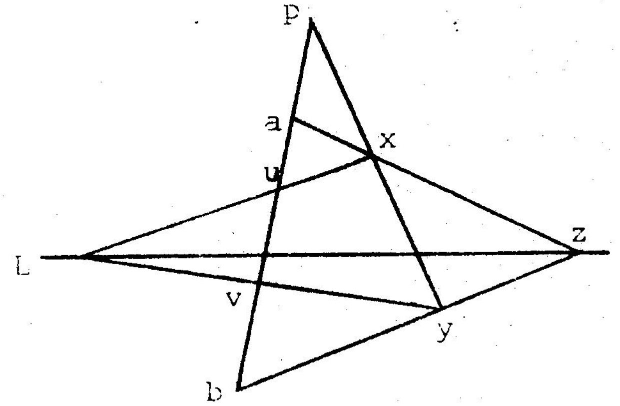
(3.3) **Stel ϕ_1 is een afbeelding van de verzameling van de punten van $\mathcal{P}$ in die van P', ϕ_2 een afbeelding van de verzameling van de rechten van $\mathcal{P}$ in die van $\mathcal{P}'$, zodat voor elk punt x en elke rechte L in $\mathcal{P}$ geldt** $x|L \Leftrightarrow \phi_1 x | \phi_2 L$, en zodat ϕ_1 of ϕ_2 surjectief is. Dan zijn ϕ_1 en ϕ_2 restricties van een collineatie, d.w.z. ϕ_1 en ϕ_2 zijn beide bijectief.

Bewijs. Wij bekijken het geval dat ϕ_1 surjectief is.
a) ϕ_2 is injectief. Stel nl. L en M zijn rechten in P zodat $\phi_2 L = \phi_2 M$. Kies punten $y_1 \neq y_2$ op $\phi_2 L$. Er zijn punten x_1 en x_2 in P zodat $\phi_1 x_i = y_i, i = 1,2$; uiteraard is $x_1 \neq x_2$. Maar dan moet $x_i | L$ en $x_i | M$ voor $i = 1,2$, aangezien $\phi_1 x_i | \phi_2 L$ en $\phi_1 x_i | \phi_2 M$. Dus $L = M$.
b) ϕ_2 is surjectief. Neem een rechte L in $\mathcal{P}'$ en kies op L punten $y_1 \neq y_2$. Dan zijn er punten x_1, x_2 in P met $\phi_1 x_i = y_i$. De rechte door x_1 en x_2 wordt door ϕ_2 op L afgebeeld.
c) ϕ_1 is injectief. Stel x en y $\in$ P zijn punten met $\phi_1 x = \phi_1 y$. Kies twee rechten $M_1 \neq M_2$ in $\mathcal{P}'$ door $\phi_1 x. M_i = \phi_2 L_i$ voor een rechte L_i in P. Dan zijn x en y beide incident met L_i, en $L_1 \neq L_2$. Dus $x = y$.

In de rest van deze paragraaf bekijken wij collineaties van een projectief vlak $\mathcal{P}$ op zichzelf.

(3.4) Definitie. Een collineatie ϕ van $\mathcal{P}$ op zichzelf heet een kwasi-perspectiviteit (of centrale collineatie) als er een rechte L bestaat zodat $\phi p = p$ voor alle punten $p | L$. L heet de as van ϕ.

Wij willen deze kwasiperspectiviteiten aan een nader onderzoek onderwerpen. Wij houden ons aan de notatie van (3.4).



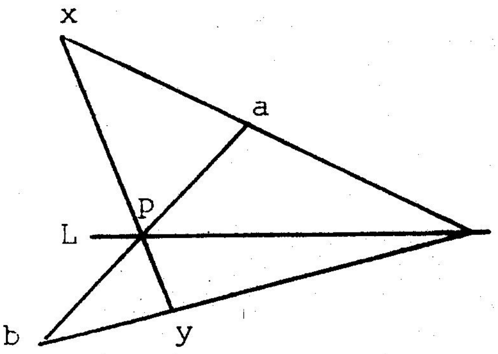
Figuur 4.

a) Er bestaat een punt $p \nmid L$, zodat $\phi p = p$. Is M een rechte door p, dan is zowel p als $L \cap M$ vast onder ϕ, dus $\phi M = M$. Neem een willekeurig punt a, $\neq p$, a $\nmid$ L. $b = \phi a$ ligt op de rechte $p \oplus a$ $b \neq p$, b $\nmid$ L. Is x een punt, x $\nmid$ L, x $\nmid$ $p \oplus a$, dan ligt $y = \phi x$ op de rechte $p \oplus x$; $z = (a \oplus x) \cap L$ is vast onder ϕ, dus $\phi(a \oplus z) = b \oplus z$. Dus y ligt ook op $b \oplus z$, d.w.z. $y = (b \oplus z) \cap (p \oplus x)$.

Is u een punt van $p \oplus a$, dan kunnen wij op analoge wijze het beeld v van u construeren met behulp van een punt x en zijn beeld y, $x \nmid L$, $x \nmid p \oplus a$.

Een kwasiperspectiviteit ϕ van dit type noemen wij een dilatatie alias elatie. p heet het centrum van ϕ. Wij hebben dus gezien: een dilatatie is volledig bepaald door zijn as L, zijn centrum p en het beeld b van één willekeurig punt $a \nmid L$, $a \neq p$. b moet op $p \oplus a$ liggen, $b \neq p$, $b \nmid L$. Wij zullen verderop zien dat b met inachtneming van deze restricties willekeurig gekozen mag worden. In elk geval zien wij: is $b = a$, dan is ϕ de identiteit. Dus

(3.5) Een kwasiperspectiviteit die buiten zijn as nog twee punten vastlaat is de identiteit.



Figuur 5.

b) Er is geen punt $p \nmid L$ zodat $\phi p = p$. Neem een punt $a \nmid L$. Dan $\phi a = b \neq a$. Zij $p = (a\oplus b) \cap L$, dan is $\phi p = p$, en $\phi(a\oplus b) = \phi(a\oplus p) = \phi a \oplus \phi p = b\oplus p = a\oplus b$. Neem een willekeurige punt $x \nmid L$, wij beweren: voor $y = \phi x$ gaat $x\oplus y$ door p. Voor $x | a\oplus p$ zijn wij klaar. Neem $x \nmid a\oplus p$, stel $q = (a\oplus b)\cap(x\oplus y)$. Nu is ook $\phi(x\oplus y) = x\oplus y$, dus $\phi q = \phi(a\oplus b)\cap\phi(x\oplus y) = q$. Dus moet $q|L$, waaruit volgt dat $q = p$, m.a.w. $p|x\oplus y$.

De rest van het bewijs loopt nu als onder a). Een punt $x \nmid L$, $a+p$ wordt afgebeeld op $y = (p\oplus x)\cap(b\oplus z)$, waarin $z = (a\oplus x) \cap L$.

Een kwasiperspectiviteit van dit type noemen wij een transvectie alias homologie. p heet het centrum van de transvectie

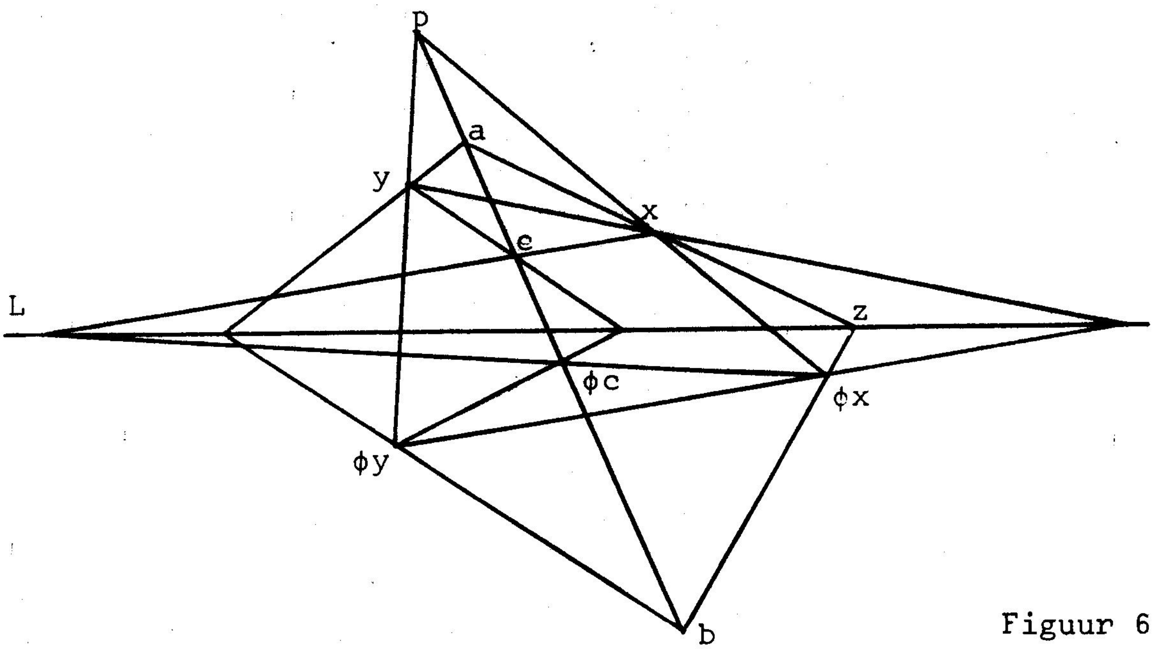
Het centrum van een kwasiperspectiviteit kunnen wij karakteriseren als het punt p met de eigenschap dat $\phi L = L$ voor alle rechten $L | p$. Ga zelf na dat een kwasiperspectiviteit die niet de identiteit is maar één centrum en één as heeft. Samenvattend hebben wij dus aangetoond:

(3.6) Bij elke kwasiperspectiviteit ϕ is er precies één punt p, het centrum van ϕ, zodat ϕ alle rechten door p op zichzelf afbeeldt. ϕ is bepaald door centrum, as en het beeld van één punt $\neq$ centrum en niet op de as. Is $\phi \neq$ identiteit, dan zijn centrum en as eenduidig bepaald.

Wij zullen nu het bestaan aantonen van kwasiperspectiviteiten met gegeven as en centrum die een punt a in een gegeven punt b afbeelden.

(3.7) Gegeven een punt p en een lijn L, al of niet incident. Gegeven verder twee punten a en b, $\neq$ p en $\nmid$ L, zodat p, a en b collineair zijn. Dan is er een kwasiperspectiviteit met centrum p en as L die a op b afbeeldt.

Bewijs. De te construeren kwasiperspectiviteit noemen wij ϕ.
Voor $x \mid L$ definiëren wij $\phi x = x$; verder $\phi p = p$.
Voor $x \nmid p\oplus a, \nmid L$ moet ϕx geconstrueerd worden als boven aangegeven onder a) en b): neem $z = (a\oplus x)\cap L$, dan $\phi x = (p\oplus x)\cap(b\oplus z)$.
Neem nu een punt $y \nmid L, \nmid p\oplus a, \nmid p\oplus x$ en construeer ϕy net zo als ϕx. Wij beweren dat $(x+y)\cap(\phi x+\phi y)$ op L ligt. Aangezien de driehoeken a, x, y en b, ϕx, ϕy puntperspectief zijn vanuit p, is dit een direct gevolg van de stelling van Desargues (2.3).



Figuur 6.

Zij nu $c \mid p\oplus a$. ϕc construeren wij dan als boven, met behulp van x en ϕx: $\phi c = (p\oplus c)\cap(\phi x\oplus((c\oplus x)\cap L))$. Maar als wij nu ϕc gaan construeren met behulp van een ander stel punten y en ϕy, is dan het resultaat hetzelfde ? Ja, want $(x\oplus y)\cap(\phi x\oplus\phi y)\mid L$, zoals boven aangetoond, en $(c\oplus x)\cap(\phi c\oplus\phi x)\mid L$, dus volgens Desargues geldt ook $(c\oplus y)\cap(\phi c\oplus\phi y)\mid L$. Wij hebben nu dus ϕ voor alle punten van het vlak op eenduidige wijze gedefinieerd. Het is makkelijk in te zien dat ϕ bijectief is;ga dit zelf na! Om te bewijzen dat ϕ een collineatie is, moeten wij tenslotte nog aantonen: x, y en z zijn collineair dan en slechts dan als ϕx, ϕy en ϕz het zijn. Voor $x = p$ of $x \mid L$ volgt dit onmiddellijk uit de constructie van ϕ. Stel nu $p \neq x, y, z$ en $L \nmid x, y, z$; x, y en z collineair. Neem $u = (x\oplus y)\cap L$. Dan $y, z \mid x\oplus u$, dus $\phi y, \phi z \mid \phi x+u$, zoals wij boven bewezen hebben. Dus ϕx, ϕy en ϕz collineair. het bewijs in omgekeerde richting gaat net zo. Daarmee zijn wij klaar.

(3.8) De kwasiperspectiviteiten met gegeven as L vormen een groep; evenzo de kwasiperspectiviteiten met gegeven as L en gegeven centrum p.

Bewijs.

Zijn ϕ en ψ kwasiperspectiviteiten met as L, dan zijn ook $\phi \circ \psi$ en ϕ^{-1} collineaties die L puntsgewijs vast laten, dus kwasiperspectiviteiten met as L. Hebben beide centrum p, dan laten ook $\phi \circ \psi$ en ψ^{-1} alle lijnen door p vast.

Ook de kwasiperspectiviteiten met een gegeven centrum p vormen een groep. Alle kwasiperspectiviteiten vormen geen groep, omdat de samenstelling van twee kwasiperspectiviteiten i.h.a. geen kwasiperspectiviteit is. De groep die ze voortbrengen bestaat uit alle eindige producten van kwasiperspectiviteiten.

(3.9) Definitie. Een projectiviteit is een collineatie die te schrijven is als eindig product van kwasiperspectiviteiten.

Let wel, een projectiviteit kan natuurlijk op verschillende manieren geschreven worden als product van kwasiperspectiviteiten. Alle projectiviteiten vormen de projectieve groep $G\mathcal{P}$.

Dit is een ondergroep van de collineatiegroep ΓP, die bestaat uit alle collineaties van het projectieve vlak $\mathfrak{P}$ op zich.

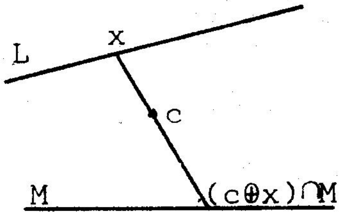
(3.10) De projectieve groep is normaal in de collineatiegroep: $GP \lhd \Gamma P$.
Bewijs: Is ϕ een kwasiperspectiviteit met as L en centrum p, en τ een willekeurige collineatie, dan laat $\tau\phi\tau^{-1}$ alle punten op τL en alle rechten door τp vast, is dus kwasiperspectiviteit met as τL en centrum τp.
Is π een projectiviteit, dus $\pi = \phi_k \cdots \phi_2 \phi_1$, waarin $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_k$ kwasiperspectiviteiten zijn, dan is $\tau\pi\tau^{-1} = \tau\phi_k\tau^{-1} \cdots \tau\phi_2\tau^{-1}\tau\phi_1\tau^{-1}$ weer een projectiviteit: $\pi \in GP,\ \tau \in \Gamma P \Rightarrow \tau\pi\tau^{-1} \in GP$.

Wij gaan nu bepaalde afbeeldingen beschouwen tussen rechten in een projectief vlak, waarbij wij een rechte opvatten als verzameling van de daarmee inciderende punten.

(3.11) Definitie. Gegeven twee rechten L en M en een punt $c \notin L$ en $\notin M$. De perspectiviteit van L op M met centrum c is de afbeelding

$$x \mapsto (c \oplus x) \cap M \text{ voor } x \in L.$$

Notatie voor deze perspectiviteit: $L \overset{c}{\to} M$



Figuur 7.

Dit is een bijectie van L op M. De inverse afbeelding is de perspectiviteit van M op L met centrum c. Merk op dat deze perspectiviteit in het affiene vlak niet in elk punt van L gedefinieerd zou zijn en dat niet elk punt van M als beeld op zou treden; waarom ?

(3.12) Definitie. Een projectiviteit van een rechte L op een rechte M is een eindig product van perspectiviteiten.

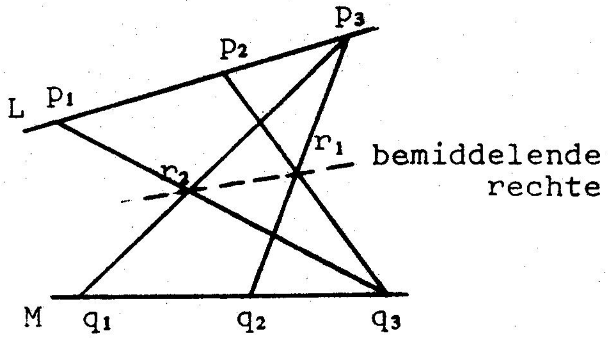
Dat wil zeggen: $\pi = L \to M$ **is een projectiviteit, als er perspectiviteiten** $\phi_1 : L \xrightarrow{c_1} L_1,\ \phi_2 : L_2 \xrightarrow{c_2} L_2, \ldots, \phi_k : L_{k-1} \xrightarrow{c_k} M$ bestaan **zodat** $\pi = \phi_k \cdots\cdots \phi_1$.

De volgende twee stellingen kan de lezer makkelijk zelf bewijzen.

(3.13) **Het product van projectiviteiten $\pi : L \rightarrow M$ en $\rho : M \rightarrow N$ is een projectiviteit $\rho\pi : L \rightarrow M$. De inverse van π is een projectiviteit $\pi^{-1} : M \rightarrow L$.**

(3.14) **De projectiviteiten van een rechte** $\mathcal{R}$ op zichzelf vormen een groep $G\mathcal{R}$. Voor een projectiviteit tussen rechten mogen de beelden van 3 punten willekeurig worden voorgeschreven.

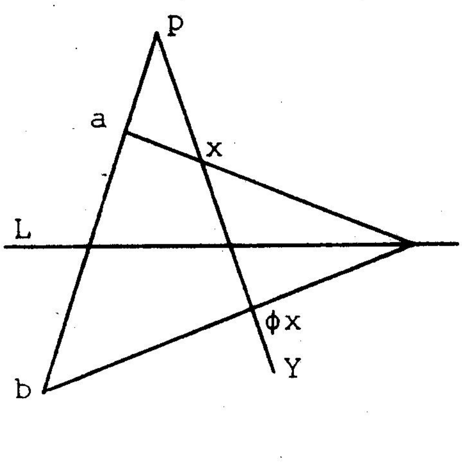
(3.15) Bij 3 verschillende punten p_1, p_2, p_3 op een rechte L en 3 verschillende punten q_1, q_2, q_3 op een rechte M bestaat een projectiviteit $\pi : L \rightarrow M$ waarvoor $\pi p_i = q_i$, $i = 1,2,3$.



Figuur 8.

Bewijs: Als $L = M$ voeren we eerst door een willekeurige perpectiviteit p_1, p_2, p_3 over in p_1', p_2', p_3' op een rechte $L' \neq L$. Laat nu $L \neq M$ zijn. We mogen aannemen dat $p_3 \neq L \cap M$ en $q_3 \neq L \cap M$. Dan zijn $r_1 = (p_2 \oplus q_3) \cap (p_3 \oplus q_2)$ en $r_2 = (p_1 \oplus q_3) \cap (p_3 \oplus q_1)$ verschillende punten (ga na). $\pi : L \overset{q_3}{\rightarrow} r_1 \oplus r_2 \overset{p_3}{\rightarrow} M$ doet het gewenste; $r_1 \oplus r_2$ heet de bemiddelende rechte van π.

(3.16) Een kwasiperspectiviteit ϕ beeldt iedere rechte Y projectief af op ϕY.



Figuur 9.

Bewijs: Laat ϕ centrum p en as L hebben. Als Y $\not|$ p is de restrictie $\phi : Y \xrightarrow{p} \phi Y$ perspectief. Zij Y|p, a $\not|$ Y en $\phi a = b$, dan is de restrictie $\phi : Y \xrightarrow{a} L \xrightarrow{b} Y$ projectief.

De volgende stelling legt een verband tussen perspectiviteiten en projectiviteiten tussen rechten enerzijds, en kwasiperspectiviteiten resp. projectiviteiten in het vlak anderzijds.

(3.17) $\pi : L \to M$ <u>is een perspectiviteit (projectiviteit) dan en slechts dan als π de restrictie is van een kwasiperspectiviteit (resp. projectiviteit) ϕ van het vlak op zichzelf die L op M afbeeldt; in het geval van een perspectiviteit π valt het centrum van π met dat van ϕ samen en kan de as van ϕ willekeurig gekozen worden door het punt $L \cap M$, mits $\neq L$ en $\neq M$.</u>

<u>Bewijs</u>. Is ϕ een kwasiperspectiviteit die L op M afbeeldt en is c het centrum van ϕ, dan induceert ϕ op L de perspectiviteit $L \overset{c}{\to} M$. Omgekeerd wordt de perspectiviteit $L \overset{c}{\to} M$ geïnduceerd door een kwasiperspectiviteit met centrum c, as $N|L\cap M$, $N \neq L, M$, die het snijpunt $a = X \cap L$ van een rechte X|c, $X \not| L \cap M$ afbeeldt op $b = X \cap M$. De rest van het bewijs is duidelijk.

<u>Opmerking</u>. Deze hele paragraaf is ook geldig voor vlakken over niet-commutatieve lichamen.

<u>Opgaven</u>.

3.1. Bij het bewijs van stelling (3.7) is gebruik gemaakt van de stelling van Desargues (2.2). Laat zien dat men omgekeerd de stelling van Desargues kan bewijzen met behulp van (3.7), verder alleen gebruik makend van de grondeigenschappen A, A*, B, C van een projectief vlak.

3.2. Beschouw de verzameling $S\mathcal{P}$ van alle collineaties van $\mathcal{P}$ die te schrijven zijn als eindig product van transvecties. Bewijs dat $S\mathcal{P}$ een ondergroep is van $G\mathcal{P}$ (en dus ook van $\Gamma\mathcal{P}$), en wel een normale ondergroep van $\Gamma\mathcal{P}$ (en dus ook van $G\mathcal{P}$). $S\mathcal{P}$ heet de <u>kleine projectieve groep</u>.

3.3.(i) Zij ϕ een collineatie die alle rechten door een punt p vastlaat. Bewijs dat ϕ een kwasiperspectiviteit is. (Veronderstel eerst dat er een rechte $L \not\ni p$ bestaat zodat $\phi L = L$. Is dit niet het geval, neem dan een rechte $A \not\ni p$, stel $\phi A = B$ en $L = (A \cap B) \oplus p$ en toon aan dat $\phi(A \cap B) = A \cap B$. Laat zien dat L niet van de keuze van A afhangt).

(ii) Toon aan dat alle kwasiperspectiviteiten met gegeven centrum p een groep vormen.

3.4.(i) Zij ϕ de dilatatie met as $\lceil 0,1,0 \rceil \oplus \lceil 0,0,1 \rceil$, centrum $\lceil 1,0,0 \rceil$ waarvoor $\lceil 1,1,1 \rceil = \lceil \alpha,1,1 \rceil$.

Bewijs dat $\phi = \lceil A \rceil$, waarin: $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ga na dat $\det A = \alpha \neq 0,1$ als $\phi \neq$ identiteit.

(ii) Zij ψ de transvectie met as $\lceil 0,1,0 \rceil \oplus \lceil 0,0,1 \rceil$, centrum $\lceil 0,1,0 \rceil$ waarvoor $\psi \lceil 1,0,0 \rceil = \lceil 1,1,0 \rceil$.

Bewijs dat $\psi = \lceil B \rceil$, waarin: $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(iii) Zij $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ met $\gamma \neq 0,1$. Laat zien dat $\lceil C \rceil$ een dilatatie is (geef centrum en as), en dat $\lceil A \rceil \lceil C \rceil = \lceil AC \rceil$ geen kwasiperspectiviteit is door alle vaste punten te bepalen (eigenvectoren).

(iv) Vind twee transvecties, waarvan de samenstelling geen kwasiperspectiviteit is.

3.5. Wij beschouwen het projectieve vlak over het lichaam F_2 met twee elementen

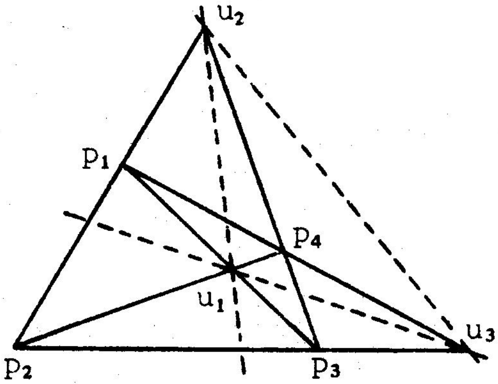
a. Bewijs dat op elke rechte precies drie punten liggen [zie opgaven 1.5. en 2.1.]

b. Beschouw een rechte L. Laat zien dat elke permutatie van de punten van L een projectiviteit is van L op zichzelf. [Bedenk dat elke permutatie te schrijven is als een product van permutaties die twee punten verwisselen en de derde vastlaten.]

Opmerking. In het algemeen is het niet waar dat in een projectief vlak alle permutaties van de punten van een rechte ook projectiviteiten zijn.!

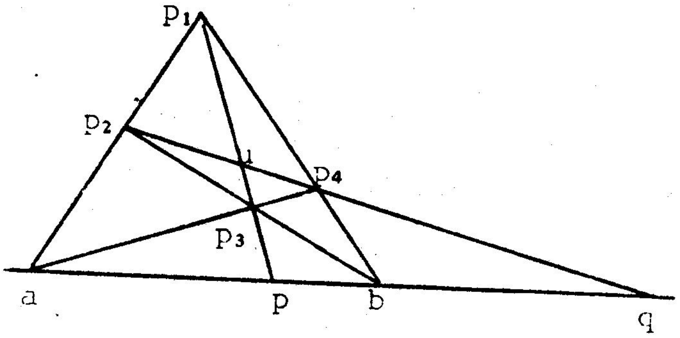
§ 4. Harmonische ligging.

Onder een vierhoek verstaan wij een viertal punten in het projectieve vlak: p_1, p_2, p_3, p_4, waarvan geen enkel drietal collineair is.
als van deze vier punten er geen enkel drietal collineair is.
De zijden van de vierhoek zijn de lijnen $p_i \oplus p_j$ voor $i \neq j$; een vierhoek heeft dus zes zijden. Twee zijden heten overstaand, als zij geen hoekpunt gemeen hebben; bijvoorbeeld $p_1 \oplus p_3$ en $p_2 \oplus p_4$ zijn overstaande zijden. De snijpunten van overstaande zijden heten diagonaalpunten : u_1, u_2 en u_3 in onderstaande figuur. De drie lijnen $u_i \oplus u_j$, $i \neq j$, heten diagonalen.



Figuur 10.

(4.1) Definitie. Zijn a, b, p en q collineaire punten, $q \neq b \neq p \neq a$, dan geldt $H(p,a,q,\ )$ als er een vierhoek p_1, p_2, p_3, p_4 bestaat zodat $a = (p_1 \oplus p_2) \cap (p_3 \oplus p_4)$, $b = (p_2 \oplus p_3) \cap (p_1 \oplus p_4)$, $p = (a \oplus b) \cap (p_1 + p_3)$, $q = (a \oplus b) \cap (p_2 + p_4)$. Het viertal p,a,q,b heet dan een harmonisch viertal of in harmonische ligging; p_1, p_2, p_3, p_4 heet een construerende vierhoek van het harmonische viertal.



Figuur 11.

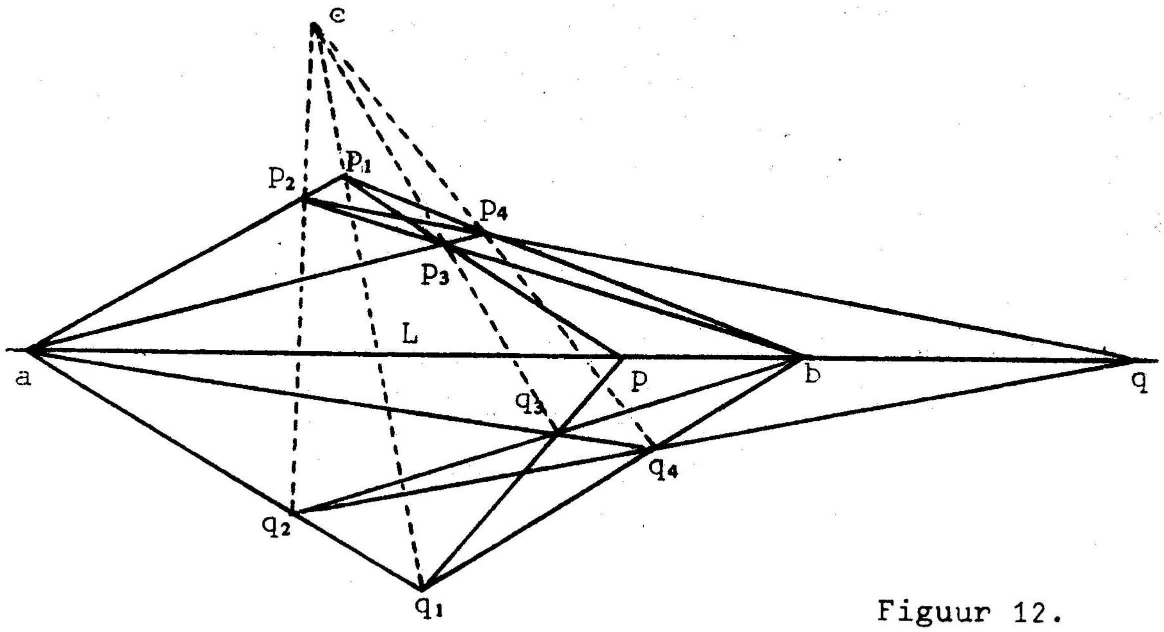
Wij noemen een afbeelding ϕ involutorisch, als ϕ^2 = identiteit, $\phi \neq$ identiteit, m.a.w. als ϕ orde 2 heeft. Uit de figuur is de volgende stelling onmiddellijk duidelijk.

(4.2) $H(p,a,q,b)$ **dan en slechts dan als er een involutorische kwasiperspectiviteit bestaat met centrum** p **en as door** q **die** a **met** b **verwisselt.**

Deze kwasiperspectiviteit beeldt de rechte $a \oplus b$ volgens (3.16) op zichzelf af door een involutorische projectiviteit π of kort: een involutie. π heeft vaste punten $p = \pi p$, $q = \pi q$ (die niet verschillend behoeven te zijn).

Van groot belang is de volgende stelling, die zegt dat bij drie punten de vierde harmonische eenduidig bepaald is.

(4.3) **Gegeven op een rechte L drie verschillende punten** a, b **en** p. **Dan is er precies één punt** $q|L$ **zodat** $H(p,a,q,b)$



Figuur 12.

Bewijs. Beschouw twee vierhoeken p_1, p_2, p_3, p_4 en q_1, q_2, q_3, q_4 met $a = (p_1 \oplus p_2) \cap (p_3 \oplus p_4) = (q_1 \oplus q_2) \cap (q_3 \oplus q_4)$,

$b = (p_2 \oplus p_3) \cap (p_1 \oplus p_4) = (q_2 \oplus q_3) \cap (q_1 \oplus q_4)$,

$p = (p_1 \oplus p_3) \cap L = (q_1 \oplus q_3) \cap L$.

Wij moeten aantonen dat

$$(p_2 \oplus p_4) \cap L = (q_2 \oplus q_4) \cap L.$$

Kies een punt c zodat c, p_1 en q_1 collineair zijn, evenals c, p_2 en q_2. Zij ϕ de kwasiperspectiviteit met centrum c en as L die p_1 in q_1 overvoert. Dan is $\phi p_2 = q_2$.
$\phi(p_1 \oplus p) = q_1 \oplus p$ en $\phi(p_2 \oplus b) = q_2 \oplus b$, dus $\phi p_3 = q_3$ omdat $p_3 = (p_1 \oplus p) \cap (p_2 \oplus b)$ en $q_3 = (q_1 \oplus p) \cap (q_2 \oplus b)$. Op analoge wijze ziet men in dat $\phi p_4 = q_4$, aangezien $p_4 = (p_3 \oplus a) \cap (p_1 \oplus b)$ etc.....
Maar dan is $\phi\ (p_2 \oplus p_4) = q_2 \oplus q_4$, dus $(p_2 \oplus p_4) \cap L = (q_2 \oplus q_4) \cap L$.

(4.4) Uit $H(p,a,q,b)$ volgen $H(q,a;p,b)$, $H(p,b;q,a)$ en $H(q,b,p,a)$.
Bewijs. Is p_1, p_2, p_3, p_4 een construerende vierhoek voor $H(p,a;q,b)$, dan is p_1, p_4, p_3, p_2 er één voor $H(q,a;p,b)$. Analoog voor de andere gevallen; zoek zelf de betreffende construerende vierhoeken op.

(4.5) Is τ een collineatie van het vlak, dan volgt uit $H(p,a,q,b)$ dat $H(\tau p,\tau a,\tau q,\tau b)$. Is π een projectiviteit van $p \oplus q$ op een rechte, dan impliceert $H(p,a,q,b)$ eveneens $H(\pi p,\pi a,\pi q,\pi b)$.
Bewijs. Is p_1, p_2, p_3, p_4 een construrende vierhoek voor $H(p,a,q,b)$, dan is τp_1, τp_2, τp_3, τp_4 er één voor $H(\tau p,\tau a;\tau q,\tau b)$. Aangezien iedere projectiviteit tussen rechten wordt geïnduceerd door een projectiviteit van het vlak, volgt de tweede bewering uit de eerste.

(4.6) $H(p,a;q,b)$ impliceert $H(a,p;b,q)$.
Bewijs. Het is, gezien de vorige stelling, voldoende een projectiviteit π van $p+q$ op zichzelf aan te geven, zodat $\pi : a \mapsto p$, $p \mapsto q$, $b \mapsto q$, $q \mapsto b$. Ga na dat het volgende product van perspectiviteiten aan het gevraagde voldoet, waarbij p_1, p_2, p_3, p_4 een construerende vierhoek van $H(p,a;q,b)$ is:

$$p \oplus q \xrightarrow{p_2} p_1 \oplus p_3 \xrightarrow{b} p_1 \oplus p_2 \xrightarrow{u} p \oplus q$$

waarin $u = (p_1 \oplus p_3) \cap (p_2 \oplus p_4)$. Teken een duidelijke figuur en bepaal van elk van de punten p,a,q,b de successievelijke beelden bij de perspectiviteiten.
Uit (4.6) en (4.4) volgt dat men in een harmonisch viertal p,a;q,b de paren a,b en p,q onderling mag verwisselen, en binnen deze paren a met b en p met q. De permutaties (pq), (ab) en (pa)(qb) (geschreven in disjuncte kringsplitsing) brengen in de permutatiegroep $\mathfrak{S}_4$ een (met D_4 isomorfe) ondergroep voort met orde 8:

I, (pq), (ab), (pq)(ab), (pa)(qb), (pb)(qa), (paqb), (bqap).

(4.7) H(p,a,q,b) <u>impliceert</u> H(q,a,p,b), H(p,b,q,a), H(q,b,p,a), H(a,p,b,q), H(b,q,a,p), H(a,q,b,p), H(b,p,a,q).

(4.8) <u>Bij 2 verschillende punten</u> a,b <u>is er een projectiviteit</u> π <u>van</u> a⊕b <u>op zich met vaste punten</u> a = πa, b = πb <u>en</u> <u>H(x,a,πx,b) voor x ≠ a,b.</u>

<u>Bewijs</u>. Kies punten p_1 en p_2, beide ∤ a⊕b, zodat a,p_1 en p_2 collineair zijn, π is dan het product van de volgende perspectiviteiten (ga na! Maak een duidelijke tekening!):

$$a \oplus b \xrightarrow{p_1} p_2 \oplus b \xrightarrow{a} p_1 \oplus b \xrightarrow{p_2} a \oplus b.$$

Omdat ook H(πx,a,x,b) volgt uit (4.3) $\pi(\pi x) = \pi^2 x = x$, dus $\pi^2 = I$. Onder in §9 aan te geven voorwaarde is $\pi \neq I$, d.w.z. dan is π een involutie.

<u>Opmerking</u>. De inhoud van deze paragraaf is ook geldig voor niet commutatieve coördinatenlichamen.

<u>Opgaven</u>.

4.1. Zij p,a,q,b een harmonisch viertal met construerende vierhoek p_1, p_2, p_3, p_4 en zij $p' = (p_1 \oplus p_3) \cap (p_2 \oplus p_4)$. Bewijs dat H(p',$p_2$;q,$p_4$) en H(p,$p_1$,p',$p_3$) en wel, 1°.door een construerende vierhoek aan te geven; 2°. met behulp van stelling (4.3).

4.2. Zijn a,b en p verschillende collineaire punten en geldt H(p,a;q,b), dan is q ≠ a en ≠ b.

4.3. Beschouw het projectieve vlak over het lichaam met twee elementen $\mathbb{F}_2$. Bewijs: Zijn a,b en p verschillende collineaire punten en is H(p,a;q,b), dan is p = q.

4.4. Beschouw een projectief vlak waarin op elke rechte meer dan vier punten liggen en dat de eigenschap heeft: H(p,a;q,b) impliceert p ≠ q. Zij L een rechte in dit vlak.

Toon aan dat niet iedere permutatie van de punten van L een projectiviteit kan zijn. (Vergelijk dit met opgave 3.5.)

4.5. Bewijs dat een kwasiperspectiviteit die twee verschillende punten verwisselt, een involutie is.

§ 5. Basispunten.

Beschouw het projectieve vlak $\mathcal{P}R$. Kiezen wij in R een basis e_o, e_1, e_2, dan leggen wij in $\mathcal{P}R$ punten $\ulcorner e_o \urcorner, \ulcorner e_1 \urcorner, \ulcorner e_2 \urcorner$ vast. Door deze punten zijn echter e_o, e_1, e_2 niet bepaald; de vectoren $\lambda_o e_o$, $\lambda_1 e_1$, $\lambda_2 e_e$, $\lambda_i \neq 0$, geven dezelfde punten. Weten wij de ligging van $\ulcorner e_o + e_1 + e_2 \urcorner$, dan zijn deze op dezelfde factor na bepaald:

als $\ulcorner \lambda_o e_o + \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 \urcorner = \ulcorner e_o + e_1 + e_2 \urcorner$, dan is

$$\lambda_o e_o + \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = \lambda(e_o + e_1 + e_2) = \lambda e_0 + \lambda e_1 + \lambda e_2,$$

dus wegens de onafhankelijkheid van e_0, e_1, e_2

$$\lambda_o = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda.$$

Het is niet mogelijk e_o, e_1, e_2 verder vast te leggen door punten in $\mathcal{P}R$ met voorgeschreven coördinaten te geven.

(5.1) Definitie. Vormen e_o, e_1 en e_2 een basis van R, dan heten $\ulcorner e_o \urcorner, \ulcorner e_1 \urcorner, \ulcorner e_2 \urcorner, \ulcorner e_o + e_1 + e_2 \urcorner$ de bijbehorende basispunten in $\mathcal{P}R$.

(5.2) Definitie. $p_1, p_2, \ldots, p_n$ heten punten in algemene ligging, als $p_i \not\mid p_j \oplus p_k$ voor verschillende i,j,k.

Het is duidelijk dat de basispunten in PR bij een basis van R algemeen liggen.

(5.3) Zijn p_o, p_1, p_2, p_3 punten in algemene ligging, dan is er een basis e_o, e_1, e_2 in R met p_o, p_1, p_2, p_3, als bijbehorende basispunten. Hebben f_o, f_1, f_2 in R dezelfde eigenschap, dan is er een $\lambda \neq 0$ zodat $f_i = \lambda e_i$.

Bewijs. Neem vectoren a_o, a_1, a_2 zodat $\ulcorner a_i \urcorner = p_i$, $i = 0,1,2$. p_o, p_1 en p_2 liggen niet op één rechte, dus a_o, a_1 en a_2 zijn lineair onafhankelijk. Wij nemen ze als basis voor R. Dan is

$p_3 = \lceil \alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 \rceil$. Aangezien $p_3 \notin p_i \oplus p_j$ $(i \neq j,\ 0 \leq i, j \leq 2)$, zijn α_0, α_1 en $\alpha_2 \neq 0$. Neem $e_i = \alpha_i a_i$.

Uit $\lceil f_i \rceil = \lceil e_i \rceil$ volgt $f_i = \lambda_i e_i$. $\lceil f_0 + f_1 + f_2 \rceil = \lceil e_0 + e_1 + e_2 \rceil$ impliceert $f_0 + f_1 + f_2 = \lambda(e_0 + e_1 + e_2)$, dus $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

Voeren wij coördinaten in t.o.v. een basis e_0, e_1, e_2 in R, dan krijgen de basispunten de coördinaten $\lceil 1,0,0 \rceil$, $\lceil 0,1,0 \rceil$, $\lceil 0,0,1 \rceil$, $\lceil 1,1,1 \rceil$.

Op een rechte geldt iets dergelijks:

(5.4) **Zijn p, q, r drie verschillende punten op een rechte dan zijn er vectoren a en b in de coördinatenruimte zodat $p = \lceil a \rceil$, $q = \lceil b \rceil$, $r = \lceil a+b \rceil$. Daarbij mag a willekeurig gekozen worden, zodat $p = \lceil a \rceil$; na keuze van a ligt b geheel vast.**

Bewijs. Neem vectoren a en x zodat $p = \lceil a \rceil$ en $q = \lceil x \rceil$. Dan $r = \lceil y \rceil$; y ligt in de deelruimte opgespannen door a en x, dus $y = \lambda a + \mu x$. $r \neq p$ en $r \neq q$, dus $\lambda \neq 0$ en $\mu \neq 0$. Voor $b = \lambda^{-1}\mu x$ geldt dan $q = \lceil b \rceil$, $r = \lceil a+b \rceil$.

Opmerking. Ook voor deze paragraaf is commutativiteit van het coördinatenlichaam niet nodig.

Opgaven.

5.1. Stel dat wij in K^3 coördinaten hebben ingevoerd t.o.v. een gegeven basis. Zoek basisvectoren zodat de bijbehorende basispunten worden:

$p_0 = \lceil 1,0,1 \rceil$, $p_1 = \lceil 1,1,1 \rceil$, $p_2 = \lceil 2,1,-1 \rceil$, $p_3 = \lceil 0,0,1 \rceil$.

5.2. In K^3 hebben wij coördinaten $\lceil \xi_0, \xi_1, \xi_2 \rceil$. Wij voeren nieuwe coördinaten $\lceil \eta_0, \eta_1, \eta_2 \rceil$ in met $\eta_i = \Sigma \alpha_{ij} \xi_j$. De basispunten van het nieuwe coördinatenstelsel hebben als oude coördinaten:

$p_0 = \lceil 0,1,1 \rceil$, $p_1 = \lceil 1,-1,1 \rceil$, $p_2 = \lceil 1,2,2 \rceil$, $p_3 = \lceil 0,2,1 \rceil$.

Bereken de matrix (α_{ij}). Ga na dat deze matrix tot op vermenigvuldiging met een factor uit K na bepaald is.

5.3. Bewijs de stelling van Pappus-Pascal: Liggen p_1,p_2,p_3 op één rechte L, evenals q_1,q_2,q_3 op een rechte $M \neq L$, waarbij $p_i \neq q_j$ voor $i \neq j$, dan liggen ook $p_1 = (p_2 \oplus q_3) \cap (p_3 \oplus q_3)$, $r_2 = (p_3 \oplus q_1) \cap (p_1 \oplus q_2)$ en $r_3 = (p_1 \oplus q_2) \cap (p_2 \oplus q_1)$ op één rechte. Aanwijzing: Als bv. $p_1 + p_2$ is de stelling triviaal. Neem aan dat p_1,p_2,p_3 verschillend zijn en q_1,q_2,q_3 ook. Hoogstens één van de p_i en één van de q_i mogen in het snijpunt $L \cap M$ vallen; laten p_1,p_2,q_1,q_2 algemeen liggen. Kies een basis zo dat $p_1 = \lceil 1,0,0 \rceil$, $p_2 = \lceil 0,1,0 \rceil$, $q_1 = \lceil 0,0,1 \rceil$, $q_2 = \lceil 1,1,1 \rceil$, dan is $p_3 = \lceil 1,\lambda,0 \rceil$ en $q_3 = \lceil 1,1,1+\mu \rceil$. Bereken r_1,r_2,r_3 en onderzoek de collineariteit. Teken een duidelijke figuur!

5.4. **Beschouw de groep H van alle kwasiperspectiviteiten met gegeven centrum p en as L. Bewijs: als de stelling van Pappus-Pascal geldt (d.w.z: als het coördinatenlichaam commutatief is, zie** vorige opgave) **dan is H commutatief. Laat omgekeerd zien: is H commutatief (voor alle p en L), dan geldt Pappus-Pascal.** Aanwijzing: laten $\phi,\psi \in H$ gegeven zijn door $\phi a = b$, $\psi b = c$. Construeer eerst ψx en $\phi\psi x$ voor $x \notin p \oplus a$.

5.5. Zij p_1,p_2,p_3,p_4 een construerende vierhoek van het harmonisch viertal p,a,q,b als in (4.1). Voor coördinaten in zodat $a = \lceil 1,0,0 \rceil$, $b = \lceil 0,1,0 \rceil$, $p_1 = \lceil 0,0,1 \rceil$, $p_3 = \lceil 1,1,1 \rceil$. Bepaal de coördinaten van p,q,p_2,p_4 en $u = (p_1 \oplus p_3) \cap (p_2 \oplus p_4)$. Ga na dat $p \neq q \Leftrightarrow 2 \neq 0$ (ofwel $1 \neq -1$) in K. (Hiermee is (4.3) opnieuw bewezen).

§6. Dualiteit.

Voor het volgende gebruiken we de theorie van duale lineaire ruimten, zoals die samengevat is in het aanhangsel "Halflineaire algebra" (afgekort Ha) 1-3.

Zij R een 3-dimensionale K-vectorruimte. De toevoegingen Ha(14): $X \mapsto X^{\perp} \subset R^*$ voor $X \subset R$, en $U \mapsto U^{\perp} \subset R$ voor $U \subset R^*$ bewerken een 1-1 correspondentie tussen de projectieve vlakken $\mathcal{P}R$ en $\mathcal{P}R^*$, die punten aan rechten toevoegt en rechten aan punten, met behoud van de incidentie:

Ha(15) $X \subset Y \Leftrightarrow X^{\perp} \supset Y^{\perp}$, dus een correllatie is.

Door middel van deze canonieke correllatie identificeren we $\mathcal{P}R$

met $\mathfrak{P}R^*$, dat we het <u>duale</u> vlak van PR noemen; beter gezegd: we voegen ze samen tot één meetkundige structuur P ⟨ R^*,R ⟩ met als elementen de paren $\ulcorner U,X \urcorner$ van twee lineaire deelruimten $U \subset R^*$, $X \subset R$ waarvoor $U = X^\perp$, $U^\perp = X$; incidentie van $\ulcorner U,X \urcorner$ met $\ulcorner V,Y \urcorner$ wordt uitgedrukt door $U \subset V$ & $X \supset Y$ of $U \supset V$ & $X \subset Y$. We noemen $\ulcorner U,X \urcorner$ als
dim U = 1, dim X = 2: punt van $\mathfrak{P}R^*$= rechte van $\mathfrak{P}R$,
dim U = 2, dim X = 1: rechte van $\mathfrak{P}R^*$ = punt van $\mathfrak{P}R$,
en representeren het naar verkiezing door $U \subset R^*$ of $X \subset R$.
Een rechte van $\mathfrak{P}R$ laat zich dus ook schrijven als een 1-dimensionale lineaire deelruimte van R , opgespannen door één $u \neq 0$; wij schrijven deze nu $\lfloor u \rfloor = Ku = \{\lambda u | \lambda \in K\}$. Incidentie van punt $\lceil x \rceil$ en rechte $\lfloor u \rfloor$ van $\mathfrak{P}R$ betekent $\lceil x \rceil \subset \lfloor u \rfloor$, dus

(6.1) $$\lceil x \rceil \,|\, \lfloor u \rfloor \Leftrightarrow \langle u | x \rangle = 0.$$

Bij het invoeren van coördinaten zullen we in R en R^* steeds duale bases gebruiken. Als $u = \lambda_0 e_0^* + \lambda_1 e_1^* + \lambda_2 e_2^* = \llcorner \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \lrcorner$ schrijven we voor $\lfloor u \rfloor$ ook wel $\lfloor \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \rfloor$. Incidentie luidt dan

(6.2) $$\lceil \xi_0, \xi_1, \xi_2 \rceil \,|\, \lfloor \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \rfloor \Leftrightarrow \lambda_0 \xi_0 + \lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2 = 0.$$

De coördinaten $\llcorner \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \lrcorner$ van de rechte $\lfloor u \rfloor$ van $\mathfrak{P}R$ zijn eenvoudig de coëfficienten van een homogene lineaire vergelijking waarvan deze 2-dimensionale lineaire deelruimte van R de oplossingsverzameling is.

Uit Ha(16) zien we dat het snijpunt $X \cap Y$ van twee rechten $X,Y \in \mathfrak{P}R$ beantwoordt aan de verbindingslijn $(X \cap Y)^\perp = X^\perp + Y^\perp$ van de bijbehorende punten $X^\perp$, $Y^\perp \in \mathfrak{P}R^*$, en de verbindingslijn X+Y van twee punten $X,Y \in$ PR aan het snijpunt $(X,Y)^\perp = X^\perp \cap Y^\perp$ van de rechten $X^\perp, Y^\perp \in \mathfrak{P}R^*$. Hebben we dus een uitspraak geldig in $\mathfrak{P}R$, die opgebouwd is met de begrippen punt,rechte en incidentie (en de afgeleide begrippen verbindingslijn, snijpunt van lijnen, etc. etc.), en vervangen we het woord "punt" door "rechte", "rechte" door "punt" (en dus ook "verbindingslijn" door snijpunt" en omgekeerd), dan krijgen we een uitspraak die geldig is in het duale vlak PR^*;we noemen dit de <u>duale</u> <u>uitspraak</u>,en spreken over <u>dualiseren</u> van een uitspraak, als we de woorden "punt" en "lijn" verwisselen,

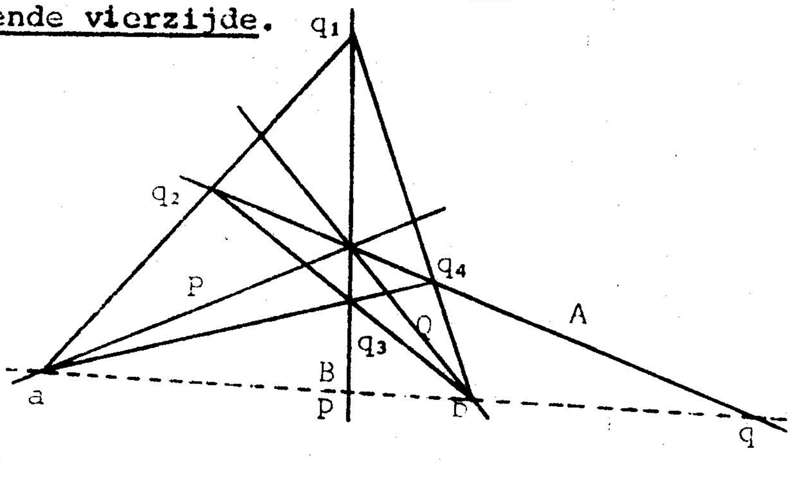
etc. Aangezien de klasse van duale vlakken van alle projectieve vlakken weer uit alle projectieve vlakken bestaat, volgt hieruit het zeer belangrijke

(6.3) Dualiteitsprincipe. Geldt een bepaalde stelling in alle projectieve vlakken, dan geldt eveneens in alle projectieve vlakken de duale stelling, die wij uit de oorspronkelijke stelling krijgen door de woorden "punt" en "rechte" te verwisselen en dus ook "verbindingslijn van twee punten" en "doorsnede van twee rechten", enz.

Voorbeeld. De stelling van Desargues (2.2). De duale stelling luidt: Zijn L_1, L_2, L_3 en M_1, M_2, M_3 twee driezijden zodat de punten $L_1 \cap M_1$, $L_2 \cap M_2$ en $L_3 \cap M_3$ collineair zijn, dan gaan de rechten $(L_1 \cap L_2) \oplus (M_1 \cap M_2)$, $(L_2 \cap L_3) \oplus (M_2 \cap M_3)$, $(L_3 \cap L_1) \oplus (M_3 \cap M_1)$ door één punt.

Aangezien een driezijde op voor de hand liggende wijze opgevat kan worden als een driehoek, staat hierboven dus in feite: zijn twee driehoeken lijnperspectief, dan zijn ze ook puntperspectief. Dit is precies de omgekeerde van de stelling van Desargues, (2.2). Let wel, in het algemeen is de duale van een stelling niet equivalent met de omgekeerde ervan ! Wij willen nu de definitie van een harmonisch puntenviertal (4.1) dualiseren. Wij krijgen dan

(6.4) Definitie. Voor vier concurrente lijnen A,B,P,Q, $A \neq B \neq P \neq A$, geldt $H(P,A,Q,B)$ als er een vierzijde P_1, P_2, P_3, P_4 is zodat $A = (P_1 \cap P_2) \oplus (P_3 \cap P_4)$, $B = (P_2 \cap P_3) \oplus (P_1 \cap P_4)$, $P = (P \cap Q) \oplus (P_1 \cap P_3)$, $R = (P \cap Q) \oplus (P_2 \cap P_4)$. Het viertal P,A,Q,B heet dan een harmonisch viertal rechten, P_1, P_2, P_3, P_4 een construerende vierzijde.



Figuur 13.

Bekijk figuur 13. De hoekpunten q_1, q_2, q_3, q_4 van de vierzijde P_1, P_2, P_3, P_4 vormen een construerende vierhoek voor het harmonisch puntenviertal p,a,q,b dat op de lijn L uitgesneden wordt door B,P,A,Q. Uit de invariantie van harmonische ligging onder o.a. perspectiviteiten volgens (4.5) en uit (4.7) volgt dat P,A,Q,B op elke rechte een harmonisch viertal uitsnijden. Wij vinden dus

(6.5) Gegeven vier rechten P, A, Q, B door een punt c en een rechte L niet door c. Als P, A, Q, B de rechte L snijden in p, a, q, b resp., dan geldt H(P, A , Q, B) dan en slechts dan als H(p, a , q, b).
Bewijs "Slechts dan" hebben wij al bewezen. "Dan" volgt hieruit door dualiseren.

Opmerking. De theorie van de dualiteit kan men ook opzetten over niet commutatieve lichamen. Men moet dan onderscheid maken tussen linkslineair en rechtslineaire ruimten, zoals aangegeven in Ha 2, opm. 1.

Voor een commutatief lichaam K kunnen we in K^3 een vectorieel product invoeren op dezelfde wijze als in $\mathbb{R}^3$ door voor a = $= \ulcorner\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\urcorner$ en b = $\ulcorner\beta_1, \beta_2, \beta_3\urcorner$ te stellen

$$a \times b = \ulcorner \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \urcorner .$$

Vatten we K^3 op als zijn eigen duale: $K^3 = K^{3*} = {}^3K$, m.a.w. identificeren we rij- en kolomvectoren, dan wordt a × b ook vastgelegd door

$$\langle a \times b | x\rangle = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \xi_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \xi_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \xi_3 \end{vmatrix} \text{ voor alle } x = \ulcorner\xi_1, \xi_2, \xi_3\urcorner \in K^3 .$$

Hieruit volgen de bekende eigenschappen, zoals

$$\langle a \times b | a\rangle = \langle a \times b | b\rangle = 0$$

$$a \times b \neq 0 \Leftrightarrow a \text{ en } b \text{ onafhankelijk}; \ a \times a = 0.$$

Geven we voor $x \in K^3$ met $\lceil x \rceil$ een punt en $\lfloor x \rfloor$ een rechte van $\mathfrak{P}K^3$ aan, d.w.z. we beschouwen x in $\lfloor x \rfloor$ als vector van $K^{3*} = K^3$ en $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil^{\perp}$ als 2-dimensionale lineaire deelruimte van K^3, dan blijkt dat we verbindingslijnen en snijpunten met het vectorieel product kunnen berekenen:

(6.6) $$\lceil a \rceil \oplus \lceil b \rceil = \lfloor a \times b \rfloor = \lceil a \times b \rceil^{\perp}.$$
$$\lfloor a \rfloor \cap \lfloor b \rfloor = \lceil a \rceil^{\perp} \cap \lceil b \rceil^{\perp} = \lceil a \times b \rceil.$$

Collineariteit van $\lceil a \rceil, \lceil b \rceil, \lceil c \rceil$ resp. concurrentie van $\lfloor a \rfloor, \lfloor b \rfloor, \lfloor c \rfloor$ wordt beschreven door $\langle a \times b | c \rangle = 0$,

Opgaven.

6.1. Dualiseer de stelling van Pappus-Pascal (zie opgave 5.3). Maak een duidelijke tekening ter illustratie van de duale stelling. Toon aan dat de duale stelling equivalent is met de stelling van Pappus-Pascal zelf.

6.2. Dualiseer de definitie van kwasiperspectiviteit (3.4). Laat zien dat een duale kwasiperspectiviteit hetzelfde is als een kwasiperspectiviteit. (Vergelijk opgave 3.3.i). Zelfde vragen voor projectiviteiten in het vlak.

6.3. De verzameling van alle rechten **door een punt p noemen wij een waaier; p heet het centrum van de waaier. Definieer, duaal aan (3.11) en (3.12), perspectiviteiten en projectiviteiten tussen waaiers.**

6.4. Wat zijn de lijnen van de waaier door het snijpunt van de rechten $\lfloor a \rfloor$ en $\lfloor b \rfloor$ als $\lfloor a \rfloor \neq \lfloor b \rfloor$?

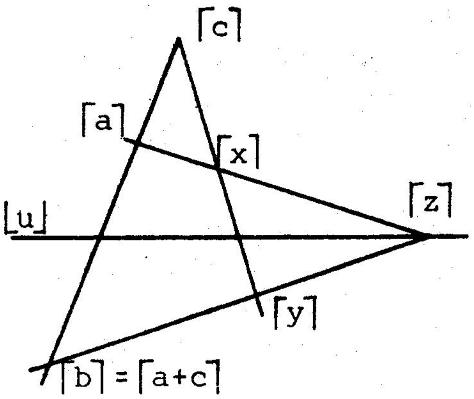
6.5. In de coördinatenruimte R **kiezen wij een basis e_0, e_1, e_2, in de duale ruimte** R^* **de duale basis e_0^*, e_1^*, e_2^*. Wij interpreteren de punten van** PR^* **als lijnen in** PR **. Teken een een figuur in** PR **bestaande uit de vier basispunten $\lceil e_0 \rceil$, etc. Teken daarin de basislijnen $\lfloor e_0^* \rfloor$, $\lfloor e_1^* \rfloor$, $\lfloor e_2^* \rfloor$, $\lfloor e_0^* + e_1^* + e_2^* \rfloor$.**

6.6. Bereken in $\mathcal{P}K^3$ de rechte $\lfloor u \rfloor$ door $\lceil 1,1,0 \rceil$ en $\lceil 1,-1,-1 \rceil$. Bereken ook het snijpunt van de rechten $\lfloor 1,-1,-1 \rfloor$ en $\lfloor 0,2,1 \rfloor$.

6.7. Bewijs de stelling van Pappus-Pascal (opgave 5.3) met behulp van (6.6). Aanwijzing: gebruik $(a \times b) \times c = \langle a|c \rangle b - \langle b|c \rangle a$.

§ 7. Projectiviteiten en lineaire afbeeldingen.

Wij willen nu de projectiviteiten van het vlak $\mathfrak{P}R$ op zichzelf beschrijven door zekere afbeeldingen van R op zichzelf. Wij onderzoeken daartoe allereerst kwasiperspectiviteiten. Zij ϕ een kwasiperspectiviteit met centrum $\lceil c \rceil$, as $\lfloor u \rfloor$, die $\lceil a \rceil$ in $\lceil b \rceil$ overvoert. Omdat $\lceil b \rceil$ op $\lceil a \rceil \oplus \lceil c \rceil$ ligt, mogen wij aannemen dat $b = a + c$ volgens (5.4). Merk op dat $\langle u|a\rangle \neq 0$ en $\langle u|b\rangle \neq 0$; we laten toe dat $\langle u|c\rangle = 0$, d.w.z. $\lfloor u \rfloor | \lceil c \rceil$. Kies u zo dat $\langle u|a\rangle = 1$. Voor de verklaring van notaties zie figuur 14.



Figuur 14.

Wij mogen voor z nemen $z = x + \lambda a$. Uit $\langle u|z\rangle = \langle u|x\rangle + \lambda\langle u|a\rangle = 0$ volgt $\lambda = -\langle u|x\rangle$.

Voor y kunnen wij nemen $y = x + \gamma c = \beta b + \zeta z = \beta(a+c) + \zeta(x+\lambda a)$.

Dus

$$x + \gamma c = \beta a + \beta c + \zeta x + \zeta\lambda a.$$

Voor $\lceil x \rceil \nmid \lceil a \rceil + \lceil c \rceil$ zijn a, c en x onafhankelijk, zodat

$$\beta + \zeta\lambda = 0,\ \zeta = 1,\ \gamma = \beta = -\lambda = \langle u|x\rangle.$$

Dus

$$y = x + \langle u|x\rangle c.$$

We zien dat $y \neq 0$ als $\lceil x \rceil \neq \lceil c \rceil$, en voor $x = c$ wordt: $y = (1+\langle u|c\rangle)c = \langle u|b\rangle c \neq 0$. De afbeelding $A : x \mapsto x + \langle u|x\rangle c$ is lineair met kern O, dus een lineaire transformatie $A \in GL(R)$, met inverse $A^{-1} : x \mapsto x - \langle u|b\rangle^{-1}\langle u|x\rangle c$ (ga na). Voor $\lceil x \rceil | \lfloor u \rfloor$ is $Ax = x$, $\lceil A \rceil \lceil x \rceil = \lceil x \rceil$, dus $\lceil A \rceil$ is een kwasiperspectiviteit met as $\lfloor u \rfloor$ (3.4). Omdat $\lceil A \rceil \lceil c \rceil = \lceil c \rceil$, $\lceil A \rceil \lceil a \rceil = \lceil b \rceil$ is $\lceil A \rceil = \phi$ (3.6). Omdat iedere projectiviteit product is van kwasiperspectiviteiten, hebben wij daarmee bewezen:

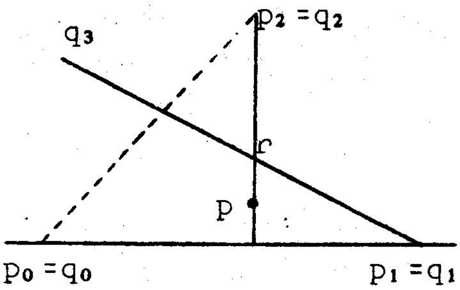
(7.1) Is π een projectiviteit van $\mathcal{P}R$ op zichzelf, dan is er een lineaire transformatie A van R op zichzelf zodat

$$\pi\lceil x\rceil = \lceil Ax\rceil \text{ voor alle } x.$$

Notatie: $\pi = \lceil A\rceil$. π heet de door A geïnduceerde projectiviteit.

(7.2) Zijn p_0, p_1, p_2, p_3 punten in algemene ligging evenals q_0, q_1, q_2, q_3, dan is er een projectiviteit die p_i overvoert in q_i voor alle i.

Bewijs. Wij passen eerst een kwasiperspectiviteit toe die p_0 op q_0 afbeeldt; wij mogen daarna aannemen dat $p_0 = q_0$. Pas nu een kwasiperspectiviteit toe met as door q_0 die p_1 in q_1 overvoert. Veronderstel dus verder dat $p_0 = q_0$, $p_1 = q_1$. Neem dan een kwasiperspectiviteit met as $q_0 \oplus q_1$, die $p_2 \to q_2$. Van nu af: $p_0 = q_0$, $p_1 = q_1$, $p_2 = q_2$. Zij r het snijpunt van $p_3 + q_2$ met $q_1 \oplus q_3$. Pas eerst de kwasiperspectiviteit toe met q_2 als centrum en $q_0 \oplus q_1$ als as, die $p_3 \mapsto r$, dan de kwasiperspectiviteit met q_1 als centrum en $q_0 \oplus q_2$ als as, die $r \mapsto q_3$. Dan zijn wij klaar.



Figuur 15.

(7.3) Iedere lineaire transformatie van R induceert een projectiviteit in $\mathcal{P}R$. $\lceil A\rceil = \lceil B\rceil$ dan en slechts dan als er een $\lambda \neq 0$ in K is zodat $B = \lambda A$. Zijn p_0, p_1, p_2, p_3 punten in algemene ligging alsook q_0, q_1, q_2, q_3, dan is er precies één projectiviteit die p_i overvoert in q_i voor alle i.

Bewijs. Zij A een lineaire transformatie van R. Neem een basis e_0, e_1, e_2 in R. De punten $\lceil e_0\rceil, \lceil e_1\rceil, \lceil e_2\rceil, \lceil e_0+e_1+e_2\rceil$ liggen algemeen; evenzo $\lceil Ae_0\rceil, \lceil Ae_1\rceil, \lceil Ae_2\rceil, \lceil Ae_0+Ae_1+Ae_2\rceil$ (omdat Ae_0, Ae_1, Ae_2 weer een basis zijn). Zij π een projectiviteit die $\lceil e_i\rceil$ overvoert in $\lceil Ae_i\rceil$, $i = 0,1,2$, en $\lceil e_0+e_1+e_2\rceil$ in $\lceil Ae_0+Ae_1+Ae_2\rceil$.

π wordt geïnduceerd door een lineaire afbeelding B, dus $\lceil Ae_i \rceil =$ $= \lceil Be_i \rceil$, $\lceil Ae_0+Ae_1+Ae_2 \rceil = \lceil Be_0+Be_1+Be_2 \rceil$. Dan is dus $Be_i = \lambda_i Ae_i$, en $Be_0+Be_1+Be_2 = \lambda(Ae_0+Ae_1+Ae_2) = \lambda_0 Ae_0+\lambda_1 Ae_1+\lambda_2 Ae_2$, wegens de onafhankelijkheid van Ae_0, Ae_1, Ae_2 is $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda$; voor $x =$ $= \xi_0 e_0+\xi_1 e_1+\xi_2 e_2$ is nu $Bx = \xi_0 Be_0+\xi_1 Be_1+\xi_2 Be_2 = \xi_0 \lambda Ae_0+\xi_1 \lambda Ae_1+$ $+\xi_2 \lambda Ae_2 = \lambda(\xi_0 Ae_0+\xi_1 Ae_1+\xi_2 Ae_2) = \lambda Ax$ (voor commutatieve K), dus $\lceil A \rceil = \lceil B \rceil = \pi$, een projectiviteit.

Uit het bovenstaande blijkt: zijn A en B lineaire transformaties waarvoor $\lceil Ae_i \rceil = \lceil Be_i \rceil$, $i = 0,1,2$ en $\lceil Ae_0+Ae_1+Ae_2 \rceil = \lceil Be_0+Be_1+Be_2 \rceil$, dan is $B = \lambda A$, dus $\lceil A \rceil = \lceil B \rceil$. Dit bewijst de tweede uitspraak en tevens de uniciteit in de derde; de existentie was in (7.2) al aangetoond.

De toevoeging $A \mapsto \lceil A \rceil$ is een homomorfisme. (7.3) zegt dat dit de algemene lineaire groep GL(R) afbeeldt òp de projectieve groep $G\mathcal{P}(R)$, met als kern de ondergroep H(R) van de homothetieen $H_\lambda : x \mapsto \lambda x$. Dus

(7.4) $\quad G\mathcal{P}(R) \cong \underline{PGL(R) = GL(R)/H(R)}$.

Over niet-commutatieve lichamen gaat in **bovenstaande stelling** de uniciteit verloren.

Opgaven.

7.1. Bepaal de lineaire afbeelding $A : x \mapsto x + \langle u|x \rangle c$ waarvoor $\lceil A \rceil$ de kwasiperspectiviteit is met centrum $\lceil 1,0,0 \rceil$, as $\lfloor 1,0,0 \rfloor$, die $\lceil 1,1,0 \rceil$ afbeeldt op $\lceil \alpha,1,0 \rceil$.
Zelfde vraag voor de kwasiperspectiviteit met centrum $\lceil 1,0,0 \rceil$, as $\lfloor 0,1,0 \rfloor$ die $\lceil 0,1,0 \rceil$ op $\lceil \alpha,1,0 \rceil$ afbeeldt.

7.2. Geef een matrix voor de projectiviteit die

$$\begin{aligned}\lceil 1,1,0 \rceil &\mapsto \lceil 1,2,3 \rceil\\ \lceil 1,0,1 \rceil &\mapsto \lceil 1,2,1 \rceil\\ \lceil 0,1,1 \rceil &\mapsto \lceil 2,-2,1 \rceil\\ \lceil 4,-1,0 \rceil &\mapsto \lceil 0,2,1 \rceil\end{aligned}$$

7.3. Bewijs dat de collineatie $p = \lceil \xi_0,\xi_1,\xi_2 \rceil \mapsto \bar{p} = \lceil \bar{\xi}_0,\bar{\xi}_1,\bar{\xi}_2 \rceil$ van $P\mathbb{C}^3$ niet projectief is.

§8. Projectieve coördinaten op de rechte.

Op een projectieve rechte L kiezen wij drie basispunten p_0, p_1 en p_∞. Er is dan (volgens (5.4)) een basis e_0, e_1 van de lineaire ruimte L zodat $p_0 = \lceil e_0 \rceil$. $p_1 = \lceil e_0 + e_1 \rceil$, $p_\infty = \lceil e_1 \rceil$. Een willekeurig punt p van L is te schrijven als $p = \lceil \xi_0 e_0 + \xi_1 e_1 \rceil$. Is e_0', e_1' nog een basis van L waarvoor $p_0 = \lceil e_0' \rceil$, $p_1 = \lceil e_0' + e_1' \rceil$, $p_\infty = \lceil e_1' \rceil$, dan moet $e_0' = \lambda_0 e_0$, $e_1' = \lambda_1 e_1$, $e_0' + e_1' = \lambda(e_0 + e_1) = \lambda_0 e_0 + \lambda_1 e_1$, dus $\lambda = \lambda_0 = \lambda_1$ en $e_0' = \lambda e_0$, $e_1' = \lambda e_1$ zijn. Als nu ook $p =$ $= \lceil \xi_0' e_0' + \xi_1' e_1' \rceil$ is $\xi_0' e_0' + \xi_1' e_1' = \rho(\xi_0 e_0 + \xi_1 e_1) =$ $= \xi_0' \lambda e_0 + \xi_1' \lambda e_1$, dus $\rho\xi_0 = \xi_0' \lambda$, $\rho\xi_1 = \xi_1' \lambda$. Hieruit volgt dat $\xi_0^{-1}\xi_1 =$ $= \xi_0^{-1} \rho^{-1} \rho \xi_1 = (\rho\xi_0)^{-1} \rho\xi_1 = (\xi_0' \lambda)^{-1} \xi_1' \lambda = \lambda^{-1} \xi_0'^{-1} \lambda' =$ (voor commutatieve K) $\xi_0'^{-1} \xi_1'$. Dus $\xi_0^{-1}\xi_1 = \xi$ is door p en de basispunten volkomen bepaald; ingeval $\xi_0 = 0$ nemen wij $\xi = \infty$. Op deze manier hebben wij bijectief aan iedere $p|L$ een element van K of het symbool ∞ toegevoegd; wij noemen dit de <u>projectieve coördinaat</u> van p t.o.v. de basispunten p_0, p_1 p_∞. Merk op dat p_0, p_1 en p_∞ de coördinaten 0, 1 resp. ∞ hebben. Voor $\xi \in K$ heeft $\lceil e_0 + \xi e_1 \rceil$ de coördinaat ξ.
Van het punt $\lceil \xi_0 e_0 + \xi_1 e_1 \rceil$ noemen wij $\lceil \xi_0, \xi_1 \rceil$ de <u>homogene coördinaten</u>.

Wij gaan nu projectiviteiten tussen rechten beschrijven met behulp van een projectieve coördinaat op elk van die rechten. Zij π een projectiviteit van de rechte L op de rechte M. π is de restrictie van een projectiviteit ρ in het vlak. ρ wordt volgens (7.1) geïnduceerd door een lineaire transformatie in de coördinaten, dus π door de restrictie hiervan, dat is een lineaire bijectie L $\to$ M. Voeren wij op L en M homogene coördinaten in, dan ziet π er derhalve als volgt uit:

$$\pi : \lceil \xi_0, \xi_1 \rceil \mapsto \lceil \gamma\xi_1 + \delta\xi_0, \alpha\xi_1 + \beta\xi_0 \rceil ,$$

geïnduceerd door $\begin{pmatrix}\xi_0\\ \xi_1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}\delta & \gamma\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\zeta_0\\ \zeta_1\end{pmatrix}$, met $\alpha\delta - \beta\gamma = \begin{vmatrix}\delta & \gamma\\ \beta & \alpha\end{vmatrix} \neq 0$. In de projectieve coördinaat wordt dit:

$$\pi : \xi \mapsto \frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta} .$$

Klaarblijkelijk moeten wij voor $\gamma\xi + \delta = 0$ de waarde ∞ toekennen aan $\frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}$. Wat gebeurt er als $\xi = \infty$? Dan krijgen wij in homogene coördinaten

$$\pi\ulcorner 0,1\urcorner = \ulcorner\gamma,\alpha\urcorner$$

dus $\pi\infty = \frac{\alpha}{\gamma}$

waarbij wij voor $\gamma = 0$, $\frac{\alpha}{\gamma} = \infty$ moet stellen. I.a.w., aan de bovengenoemde "rekenregels" voor ∞ moeten wij toevoegen:

$$\frac{\alpha\infty + \beta}{\gamma\infty + \delta} = \frac{\alpha}{\gamma},$$

als het ware de "limietwaarde" voor $\xi \to \infty$ van $\frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}$.

Het is verder duidelijk dat omgekeerd een transformatie van de gedaante

$$\pi : \xi \mapsto \frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

geïnduceerd wordt door een lineaire transformatie in de homogene coördinaten op de rechte, die wij voort kunnen zetten tot een lineaire transformatie van de coördinatenruimte R. π wordt dus geïnduceerd door een projectiviteit van het vlak en is bijgevolg een projectiviteit tussen rechten. Daarmee is bewezen:

(8.1) <u>Een afbeelding π van een rechte L op een rechte M is een projectiviteit dan en slechts dan als π in projectieve coördinaten op L resp. M beschreven wordt door de formule</u>

$$\pi : \xi \mapsto \frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}, \text{ met } \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 .$$

De coëfficienten van deze gebroken lineaire transformatie zijn weer op een gemeenschappelijke factor na bepaald.

(8.2) <u>Hoofdstelling van de projectieve meetkunde</u>. <u>Zijn p_0, p_1, p_∞ drie verschillende punten op een rechte L, q_0, q_1, q_∞ op M. Dan is er precies één projectiviteit π van L op M zodat $\pi p_i = q_i$ $(i = 0,1,\infty)$.</u>

<u>Bewijs</u>. Neem op L de projectieve coördinaat t.o.v. p_0, p_1, p_∞, op M t.o.v. q_0, q_1, q_∞. π moet dan gegeven worden door

$$\xi \mapsto \frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\delta \neq 0.$$

Wegens $0 \mapsto 0$, $1 \mapsto 1$, $\infty \mapsto \infty$, moet

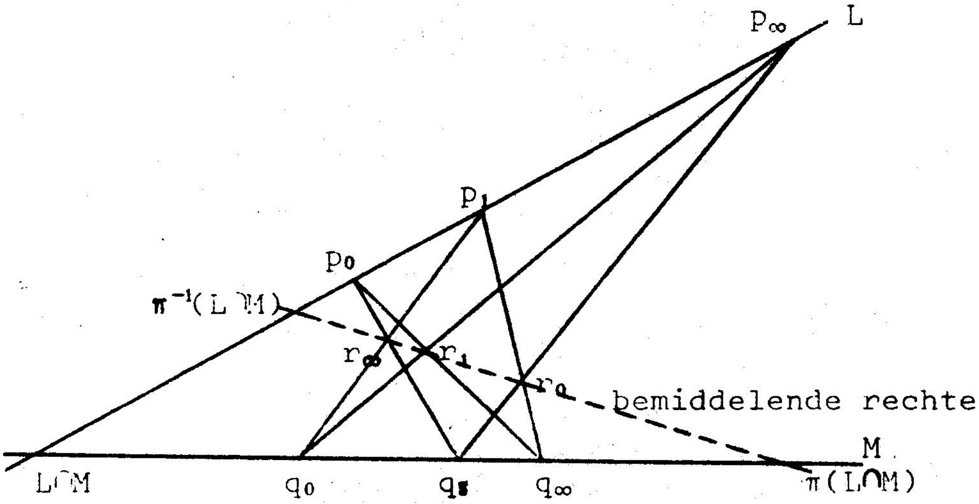
$$\alpha = \delta \neq 0, \ \beta = \gamma = 0.$$

Dus is er precies één projectiviteit π, n.l. $\xi \mapsto \xi$.

Als gevolg hiervan geldt:

(8.3) Een projectiviteit $\pi : L \to M$ van verschillende rechten $L \neq M$, die het snijpunt vast laat, $\pi(L \cap M) = L \cap M$, is een perspectiviteit.

Bewijs: Neem $p_0 = q_0 = L \cap M$, kies $p_1, p_\infty | L$ zodat p_0, p_1, p_∞ verschillend zijn, $q_1 = \pi p_1$, $q_\infty = \pi p_\infty$; stel $c = (p_1 \oplus q_1) \cap (p_\infty \cap q_\infty)$. De pectiviteit $L \xrightarrow{c} M$ stemt in p_0, p_1, p_∞ met π overeen, dus valt er volgens (8.2) geheel mee samen.



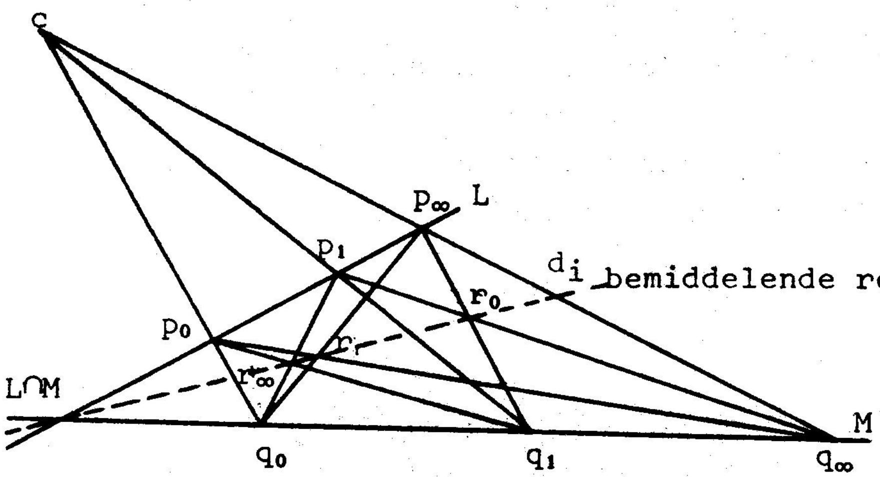
Figuur 16.

Een meetkundige constructie van een projectiviteit π als in (8.2) is in (3.15) gegeven. Een projectiviteit van verschillende rechten is product van ten hoogste 2, van een rechte op zichzelf van ten hoogste 3 projectiviteiten.

We bekijken het geval $L \neq M$:

Neem $r_0 = (p_1 \oplus q_\infty) \cap (p_\infty \oplus q_1)$, $r_1 = (p_\infty \oplus q_0) \cap (p_0 \oplus q_\infty)$, $r_\infty = (p_0 \oplus q_1) \cap (p_1 \oplus q_\infty)$.

Dan is $\pi : L \xrightarrow{q_0} r_1 \oplus r_\infty \xrightarrow{p_0} M$, maar ook $\pi : L \xrightarrow{q_1} r_0 \oplus r_\infty \xrightarrow{p_1} M$ en $\pi : L \xrightarrow{q_\infty} r_0 \oplus r_1 \xrightarrow{p_\infty} M$. Nu is $\pi(L \cap M) = M \cap (r_1 \oplus r_\infty) = M \cap (r_\infty \oplus r_0) = M \cap (r_0 \oplus r_1)$, en $\pi^{-1}(L \cap M) = L \cap (r_1 \oplus r_\infty) = L \cap (r_\infty \oplus r_0) = L \cap (r_0 \oplus r_1)$. De drie "bemiddelende rechten" $r_1 \oplus r_\infty$, $r_\infty \oplus r_0$. $r_0 \oplus r_1$ hebben dezelfde snijpunten met L en M, namelijk $\pi^{-1}(L \cap M)$ resp. $\pi(L \cap M)$, en vallen derhalve samen als deze verschillendezijn, als $\pi(L \cap M) \neq L \cap M$, dus r_0, r_1, r_∞ zijn collineair.



Figuur 17.

Ingeval $\pi(L \cap M) = L \cap M$ is π een perspectiviteit; zij c het centrum. Stel $d_i = (p_\infty \oplus q_\infty) \cap ((L \cap M) \oplus r_i)$, dan $H(p_\infty, c, q_\infty, d_i)$, dus volgens (4.3) is $d_0 = d_1 = d_\infty$, dus weer zijn r_0, r_1, r_2 collineair.

(8.4) E. Stelling van PAPPUS-PASCAL.
Liggen p_0, p_1, p_∞ op een rechte L en q_0, q_1, q_∞ op een rechte M, dan zijn $r_0 = (p_1 \oplus q_\infty) \cap (p_\infty \oplus q_1)$, $r_1 = (p_0 \oplus q_\infty) \cap (p_\infty \oplus q_0)$, $r_\infty =$ $= (p_0 \oplus q_1) \cap (p_1 \oplus q_0)$ collineair.

De stelling is triviaal als p_0, p_1, p_∞ of q_0, q_1, q_∞ niet verschillend zijn.
Wij onderzoeken nu hoe de projectieve coördinaat van een punt verandert bij een wijziging van de basispunten.

(8.5) Gegeven op de rechte L vier punten q_0, q_1, q_∞, x met coördinaten $\xi_0, \xi_1, \xi_\infty, \xi$ t.o.v. de basispunten p_0, p_1, p_∞. Wij veronderstellen q_0, q_1, q_∞ verschillend. De projectieve coördinaat van x t.o.v. de basispunten q_0, q_1, q_∞ is dan

$$DV(q_0, q_1, q_\infty, x) = \frac{\xi - \xi_0}{\xi_1 - \xi_0} : \frac{\xi - \xi_\infty}{\xi_1 - \xi_\infty},$$

de zogenaamde dubbelverhouding van q_0, q_1, q_∞ en x.

Bewijs. Veronderstel eerst dat $\xi_0, \xi_1, \xi_\infty \neq \infty$.
Laat $y \in L$ projectieve coördinaat η t.o.v. q_0, q_1, q_∞ hebben, definieer $\pi : L \to L$ door $\pi x = y \Leftrightarrow \eta = \frac{\xi-\xi_0}{\xi_1-\xi_0} : \frac{\xi-\xi_\infty}{\xi_1-\xi_\infty} = \frac{(\xi_1-\xi_\infty)(\xi-\xi_0)}{(\xi_1-\xi_0)(\xi-\xi_\infty)}$.
Dit is een gebroken lineaire transformatie met $\alpha = \xi_1 - \xi_\infty$, $\beta =$ $= (\xi_1 - \xi_\infty)\xi_0$, $\gamma = \xi_1 - \xi_0$, $\delta = (\xi_1 - \xi_0)\xi_\infty$, dus $\alpha\delta - \beta\gamma =$ $= (\xi_1 - \xi_0)(\xi_\infty - \xi_1)(\xi_0 - \xi_\infty) \neq 0$. Dus π is volgens (8.1) projectief, en zo gekozen dat $\xi = \xi_0 \mapsto \eta = 0$, $\xi = \xi_1 \mapsto \eta = 1$, $\xi = \xi_\infty \mapsto \eta = \infty$, zodat $\pi q_0 = q_0$, $\pi q_1 = q_1$, $\pi q_\infty = q_\infty$, dus volgens (8.2) is $x = \pi x = y$;

dit houdt in dat η de projectieve coördinaat van x t.o.v. q_0, q_1, q_∞ is.

In de uitzonderingsgevallen moeten we π definiëren door

$$\xi_0 = \infty: \eta = \frac{\xi_1 - \xi_\infty}{\xi - \xi_\infty} \text{ met } \alpha\delta-\beta\gamma = \xi_\infty - \xi_1 \neq 0,$$

$$\xi_1 = \infty: \eta = \frac{\xi - \xi_0}{\xi_1 - \xi_\infty} \text{ met } \alpha\delta-\beta\gamma = \xi_0 - \xi_\infty \neq 0,$$

$$\xi_\infty = \infty: \eta = \frac{\xi - \xi_0}{\xi_1 - \xi_0} \text{ met } \alpha\delta-\beta\gamma = \xi_1 - \xi_0 \neq 0.$$

Dit is,als $K = \mathbb{R}$, juist de limietwaarde voor $\xi_i \to \infty$. Wij kunnen ook zeggen dat men bij dubbelverhoudingen moet rekenen alsof $0^{-1} = \infty$, $\infty^{-1} = 0$, $\frac{\infty}{\infty} = 1$, $\infty+\alpha = \infty$ voor $\alpha \neq \infty$.

Aangezien de DV niet van de basispunten p_0, p_1, p_∞ afhangt, mogen we deze kiezen zoals ons uitkomt. Hiervan maken we gebruik bij

(8.6) Productformule

Voor vijf punten p, q, x, y, z op één projectieve rechte geldt

$$DV(p,x,q,y)\, DV(p,y,q,z) = DV(p,x,q,z)$$

Bewijs: Kies een projectieve coördinaat, die voor p, q, x, y, z respectievelijk 0, ∞, ξ, η, ζ is; dan is $DV(p,x,q,y) = \frac{\eta}{\xi}$, enz.

Uit (8.6) volgt direct:

(8.7) $$DV(p,y,q,x) = DV(p,x,q,y)^{-1}.$$

(8.8) Een afbeelding π van een rechte L op een rechte M is een projectiviteit dan en slechts dan als DV invariant is onder π.

Bewijs: Zij $\pi : L \to M$ een projectiviteit. Neem op L projectieve coördinaten t.o.v. p_0, p_1, p_∞, op M t.o.v. $q_0 = \pi p_0$, $q_1 = \pi p_1$, $q_\infty = \pi p_\infty$, dan voert π in deze coördinaten uitgedrukt $0 \mapsto 0$, $1 \mapsto 1$, $\infty \mapsto \infty$, dus wegens (8.2) is $\pi : \xi \mapsto \xi$, zodat x en πx dezelfde projectieve coördinaat hebben. Volgens (8.5) is derhalve

$$DV(p_0, p_1, p_\infty, x) = DV(\pi p_0, \pi p_1, \pi p_\infty, \pi x).$$

Omgekeerd volgt uit de gedaante $\pi : \xi \mapsto \xi$ in geschikte projectieve coördinaten dat π wegens (8.1) projectief is.

Opmerking. Over een niet-commutatief lichaam blijft er van bovenstaande theorie vrij weinig over. Dubbelverhoudingen zijn dan klassen van onder inwendige automorfismen geconjugeerde elementen. (8.2), de hoofdstelling, geldt niet meer. In feite is (8.2) of E. Pappus-Pascal equivalent met de commutativiteit van het coördinatenlichaam.

Opgaven.

8.1. Zij π een projectiviteit van een rechte L op zichzelf,.
(i) Laat zien dat π hoogstens twee vaste punten kan hebben als $\pi \neq I$.
(ii) Welke gedaante heeft π als er één vast punt is met coördinaat ∞?
(iii) En welke als er twee zijn met coördinaten $0,\infty$?
(iv) Veronderstel dat π twee punten verwisselt. Bewijs dat π een involutie is. (Neem de projectieve coördinaat zo dat $0 \mapsto \infty$ en $\infty \mapsto o$).

8.2. (i) Ga na dat voor de in (8.1) gegeven projectiviteit π de inverse wordt gegeven door π^{-1} : $\xi \mapsto \frac{\delta\xi-\beta}{-\gamma\xi+\alpha}$.
(ii) Toon aan dat π een involutie is dan en slechts dan als $\alpha+\delta = 0$. Bereken de vaste punten als π 0 en ∞ verwisselt.
(iii) Bepaal de gedaante als π een involutie is met vaste punten 0 en ∞. Ga na dat een involutie op een rechte met twee vaste punten door deze bepaald is.

8.3. Laten vier verschillende punten p,q,r,s op een rechte L gegeven zijn. Bewijs dat er een involutie π van L bestaat die p met r en q met s verwisselt, i) door berekening (kies de coördinaten van p,q,r,s resp. $0,1,\infty,\beta$); ii) door constructie als product van een perspectiviteit ϕ_1 op een rechte M door p uit een punt c, een perspectiviteit ϕ_2 van M op $c\oplus r$ uit q en een perspectiviteit ϕ_3 uit $(c\oplus s) \cap$ M. (hierbij wordt de commutativiteit van K niet gebruikt).

8.4. Zij π een projectiviteit van een rechte L op zichzelf met vast punt a. Laat zien dat π product is van een perspectiviteit ϕ_1 van L op een rechte ℓ door a en een perspectiviteit ϕ_2 van ℓ op L. Construeer het tweede vaste punt, indien aanwezig. Als er buiten a geen vast punt is, hoe liggen dan de centra van ϕ_1 en ϕ_2 ?

8.5. Zij π een involutie op een rechte L met twee vaste punten p en q. Bewijs m.b.v. de vorige opgave dat $H(p,x,q,\pi x)$, m.a.w. dat π de involutie van stelling (4.8) is.

8.6. De hoofdstelling van de projectieve meetkunde (8.2) kan men ook bewijzen met behulp van (7.3).
a) Gegeven drie verschillende punten p_0, p_1 en p_∞ op een rechte L, en q_0, q_1 en q_∞ op een rechte ℓ. Kies $p_2 \nmid L$, $p_3 | p_1 \oplus p_2$, $p_3 \nmid L$, $p_3 \neq p_2$. Dan zijn p_0, p_∞, p_2 en p_3 in algemene ligging. Analoog kiezen wij $q_2 \nmid M$, $q_3 | q_1 \oplus q_2$, $q_3 \nmid \ell$, $q_3 \neq q_2$. Er is een projectiviteit π van het vlak die $p_i \to q_i$ voor $i = 0,\infty,2,3$. π induceert een projectiviteit van L op ℓ, die $p_i \to q_i$ voor $i = 0,1,\infty$. Bewijs dit.
b) Uniciteit: wij mogen aannemen dat $p_i = q_i$ voor $i = 0,1,\infty$ (waarom ?). Zij π een projectiviteit van L op zichzelf die p_0, p_1 en p_∞ vastlaat. π wordt geïnduceerd door een projectiviteit γ van het vlak op zichzelf. Kies p_2 en p_3 als onder a) en $q_2 = \gamma p_2$, $q_3 = \gamma p_3$. Er is een transvectie τ met as L die $p_2 \to q_2$; waarom ? Er is verder een dilatatie δ met as L en centrum q_2 die $\tau p_3 \to q_3$. Dan is $\delta\tau p_i = q_i$ voor $i = 0,\infty,2,3$, dus $\delta\tau = \gamma$. De restrictie van $\delta\tau$ tot L is dus π, maar is anderzijds de identiteit (waarom ?). Dus $\pi = I$, q.e.d.

8.7. Onderzoek hoe de DV van vier punten p_1, p_2, p_3, p_4 op een rechte van hun volgorde afhangt: bepaal de ondergroep van $\mathfrak{S}_4$ bestaande uit de permutaties waarbij de DV dezelfde blijft (uitschrijven in disjuncte kringsplitsing; met welke bekende groep is deze isomorf?) en druk de waarden van de DV op de nevenklasse in elkaar uit. (Kies een projectieve coördinaat die voor p_1, p_2, p_3, p_4 resp. $0,1,\infty,\xi$ is).

§ 9. Collineaties en semilineaire afbeeldingen.

In § 7 hebben wij gezien dat projectiviteiten van het projectieve vlak op zichzelf precies die afbeeldingen zijn die geïnduceerd worden door lineaire transformaties in de coördinatenruimte. Wij willen nu iets dergelijks doen voor collineaties. Wij zullen daarvoor de theorie van semilineaire afbeeldingen nodig hebben; zie het aanhangsel "Halflineaire algebra" 5.

In het volgende zijn R en S 3-dimensionale vectorruimten over lichamen K resp. L.

Een $\frac{1}{2}$ lineaire bijectie $A : R \to S$ voert lineaire deelruimten van R over in lineaire deelruimten van dezelfde dimensie.

(9.1) Een $\frac{1}{2}$ lineaire bijectie $A : R \to S$ induceert een collineatie $\lceil A \rceil : \mathfrak{P}R \to \mathfrak{P}S$ door $X \mapsto AX$ voor een deelruimte $X \subset R$.

Aanloog aan het tweede deel van (7.3) is:

(9.2) Voor een σ-$\frac{1}{2}$lineaire bijectie $A : R \to S$ en een τ-$\frac{1}{2}$ lineaire bijectie $B : R \to S$ geldt $\lceil A \rceil = \lceil B \rceil$ dan en slechts dan als er een $\lambda \in L$, $\lambda \neq 0$ is, zodat $B = \lambda A$. In dit geval is $\sigma = \tau$.

Bewijs:

Als $\lceil A \rceil = \lceil B \rceil$, is $\lceil BA^{-1} \rceil = \lceil B \rceil \lceil A \rceil^{-1}$ de identiteit van $\mathfrak{P}S$, dus BA^{-1} een $\tau\sigma^{-1}$-$\frac{1}{2}$lineaire transformatie van S waarvoor $BA^{-1}y = \lambda_y y$ voor alle $y \in S$, met van y afhankelijke $\lambda_x \in L$. Zijn $y,z \in S$ onafhankelijk, dan is $BA^{-1}(y+z) = \lambda_{y+z}(y+z) = \lambda_y y + \lambda_z z$, dus $\lambda_{y+z} = \lambda_y = \lambda_z$; zijn $y,z \in S$ afhankelijk, dan is er (omdat dim S = 3) een van y,z onafhankelijke $z' \in S$, en $\lambda_y = \lambda_{z'} = \lambda_z$. Hieruit volgt $BA^{-1}y = \lambda y$ met dezelfde $\lambda \in L$ voor alle $y \in S$, dus (met $y = Ax$) $Bx = \lambda Ax$ voor alle $x \in R$, $B = \lambda A$. Omgekeerd evident. $B(\alpha x) = (\lambda A)(\alpha x) =$
$= \lambda\sigma(\alpha)Ax =$ (omdat K commutatief is) $\sigma(\alpha)\lambda(Ax) = \sigma(\alpha)(\lambda A)x =$
$= \sigma(\alpha)Bx = \tau(\alpha)Bx$, dus $\sigma = \tau$. Dit laatste geldt niet als K niet commutatief is, zie Ha opm. 4. In het bewijs is alleen gebruikt dat A en B additief zijn: $A(x+y) = Ax+Ay$.

Wij willen nu gaan aantonen dat omgekeerd iedere collineatie geïnduceerd wordt door een semilineaire bijectie. Daartoe treffen wij eerst enige voorbereidingen die erop neerkomen dat wij een meetkundige beschrijving geven van de algebraische structuur (optelling en vermenigvuldiging) van het coördinatenlichaam.

Wij kiezen in een projectief vlak $\mathbb{P}R$ een vaste rechte U. Na keuze van drie basispunten p_0, p_1, p_∞ hebben wij een projectieve coördinaat op U punten van U zullen wij verder dikwijls door hun projectieve coördinaat aanduiden. Wij willen eerst het effect op de punten van U bekijken van een transvectie τ waarvan de as $V \neq U$ door ∞ gaat en die 0 in α overvoert. Volgens (3.16) beeldt τ U projectief af op zich, met enige vaste punt ∞. Daartoe moet in (8.1) $\gamma = 0$ en $\alpha = \delta = 1$ (dit laatste mogen we zo kiezen omdat $\delta \neq 0$)

dus in projectieve coördinaten op R wordt τ gegeven door

(9.3) $$\tau\,\xi = \xi + \beta .$$

Merk op dat dit resultaat niet afhangt van de keuze van V, mits V door ∞ gaat (en $V \neq U$ natuurlijk).

Wij willen nu een dilatatie δ bekijken met as V en centrum o, die 1 in $\alpha \neq 1$ overvoert (zelfde notatie als boven).

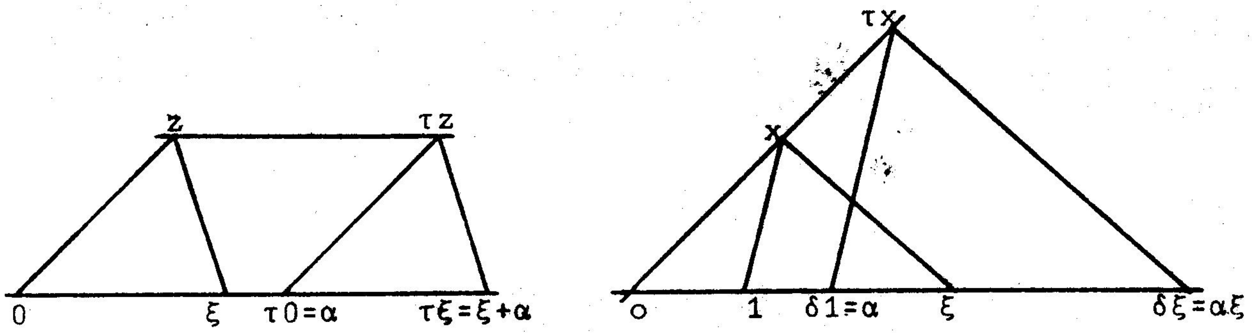
Nu beeldt δ U projectief af op zich met vaste punten $0,\infty$; daartoe moet in (8.1) $\beta = \gamma = 0$, $\delta = 1$ (omdat $\delta \neq 0$), d.w.z.

(9.4) $$\delta\xi = \alpha\xi .$$

Ook dit hangt niet af van de keuze van V.

Aangezien transvecties en dilataties meetkundig bepaald zijn, zien wij dat de optelling en vermenigvuldiging in K door de meetkundige structuur van PR vastliggen. Voordat wij het aangekondigde resultaat over collineaties bewijzen (waartoe wij nu alle hulpmiddelen gereed hebben), willen wij eerst nog even de boven gevonden formules voor de translatie τ en de dilatatie δ nader illustreren. Wij beschouwen (in de notatie als boven) V als oneigenlijke rechte en interpreteren $\mathbb{P}R\backslash V$ als affien vlak zoals in §1 ; rechten die elkaar in $\mathbb{P}R$ op V snijden worden dan evenwijdig. De constructies van $\tau\xi$ en $\delta\xi$ zien er dan respectievelijk uit als in figuur 18.

Wij zien hier bekende elementair meetkundige eigenschappen te voorschijn komen. De



Figuur 18.

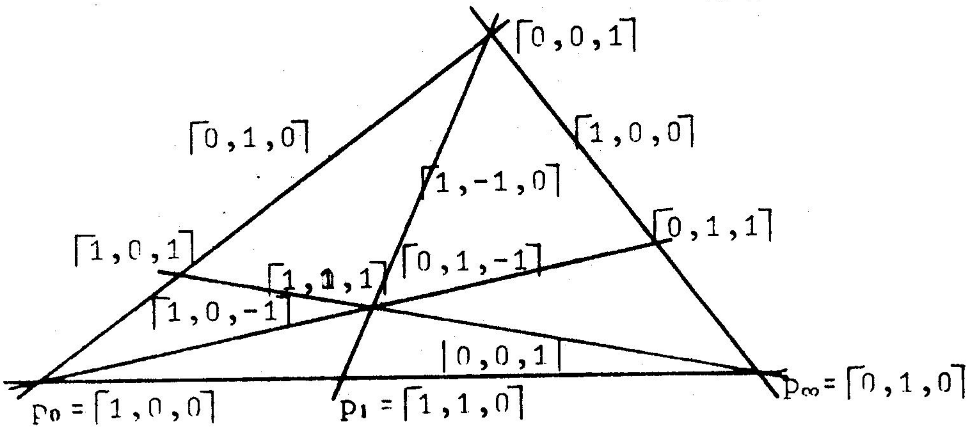
eerste figuur stelt de parallelverschuiving voor: het segment $0,\alpha$ wordt ∥ verschoven naar $z,\tau z$, en dat weer naar $\xi,\tau\xi$. De "afstand" van ξ en $\tau\xi$ is dus α, d.w.z. $\tau\xi = \xi+\alpha$, wat wij boven door berekening gevonden hadden. In de tweede figuur zien wij evenredigheidheden van lijnstukken:

$$|01| : |0\alpha| = |0x| : |0\delta x| = |0\xi| : |0\delta\xi|$$

waaruit weer volgt dat $\delta\xi = \alpha\xi$, zoals wij al wisten. Wij zullen later dieper ingaan op de affiene meetkunde.
Nu het aangekondigde resultaat over collineaties.

(9.5) <u>Is ρ een collineatie van een projectief vlak $\mathcal{P}R$ op een projectief vlak $\mathcal{P}S$ dan is er een isomorfisme σ van K op L en een σ-½ lineaire bijectie Λ van R op S zodat $\rho = \lceil\Lambda\rceil$.</u>

<u>Bewijs</u>. Kies een basis e_0,e_1,e_2 van R. ρ voert de punten $\lceil e_0\rceil,\lceil e_1\rceil,\lceil e_2\rceil,\lceil e_0+e_1+e_2\rceil$ over in vier punten in algemene ligging in $\mathcal{P}S$, dus er is een basis f_0,f_1,f_2 van S zodat $\rho\lceil e_i\rceil = \lceil f_i\rceil$, $i = 0,1,2$, $\rho\lceil e_0+e_1+e_2\rceil = \lceil f_0,f_1,f_2\rceil$.
Omdat $\rho\lceil 1,0,0\rceil = \lceil 1,0,0\rceil$ en $\rho\lceil 0,1,0\rceil = \lceil 0,1,0\rceil$, is $\rho\lfloor 0,0,1\rfloor = \lfloor 0,0,1\rfloor$. Let wel: 0 duidt hier zowel de nul van K als die van L aan; evenzo is het met 1 gesteld; verwarring kan dit evenwel niet opleveren! Verder is $\rho\lceil 0,0,1\rceil = \lceil 0,0,1\rceil$ en $\rho\lceil 1,1,1\rceil = \lceil 1,1,1\rceil$ dus $\rho\lfloor 1,-1,0\rfloor = \lfloor 1,-1,0\rfloor$.
Aangezien $\lfloor 0,0,1\rfloor \cap \lfloor 1,-1,0\rfloor = \lceil 1,1,0\rceil$ is $\rho\lceil 1,1,0\rceil = \lceil 1,1,0\rceil$.



Figuur 19.

Op $\lfloor 0,0,1 \rfloor$ (zowel in $\mathcal{P}R$ als in $\mathcal{P}S$ voeren wij een projectieve coördinaat in t.o.v. de basispunten $p_0 = \lceil 1,0,0 \rceil$, $p_1 = \lceil 1,1,0 \rceil$ en $p_\infty = \lceil 0,1,0 \rceil$. Dan krijgt dus $\lceil 1,\xi,0 \rceil$ de coördinaat ξ. Omdat $\rho \lceil 0,1,0 \rceil = \lceil 0,1,0 \rceil$, is er een bijectie σ van K op L zodat $\rho \lceil 1,\xi,0 \rceil = \lceil 1,\sigma(\xi),0 \rceil$. Merk op dat $\sigma(0) = 0, \sigma(1) = 1, \sigma(\infty) = \infty$.

Zij τ de transvectie van $\mathcal{P}R$ met as $\lfloor 1,0,0 \rfloor$ en centrum $\lceil 0,1,0 \rceil$ die $\lceil 1,0,0 \rceil$ overvoert in $\lceil 1,\beta,0 \rceil$. Op $\lfloor 0,0,1 \rfloor$ induceert τ volgens (9.3) de afbeelding $\xi \to \xi+\beta$. Nu is $\rho\tau\rho^{-1}$ de transvectie van $\mathcal{P}S$ met as $\rho \lfloor 1,0,0 \rfloor = \lfloor 1,0,0 \rfloor$ en centrum $\rho \lceil 0,1,0 \rceil = \lceil 0,1,0 \rceil$ die $\rho \lceil 1,0,0 \rceil = \lceil 1,0,0 \rceil$ overvoert in $\rho \lceil 1,\alpha,0 \rceil = \lceil 1,\sigma(\beta),0 \rceil$; deze induceert op $\lfloor 0,0,1 \rfloor$ de afbeelding $\eta \to \eta + \sigma(\beta)$. Nu is $\tau(\xi) = \xi + \beta$, dus

$$\rho\tau\rho^{-1}(\sigma(\xi)) = \rho\tau(\xi) = \rho(\xi+\beta) = \sigma(\xi+\beta),$$

anderzijds is

$$\rho\tau\rho^{-1}(\sigma(\xi)) = \sigma(\xi) + \sigma(\beta),$$

waaruit wij concluderen dat

$$\sigma(\xi+\beta) = \sigma(\xi) + \sigma(\beta).$$

Beschouw nu de dilatatie δ van $\mathcal{P}R$ met as $\lfloor 1,0,0 \rfloor$ en centrum $\lceil 1,0,0 \rceil$ die $\lceil 1,1,0 \rceil$ overvoert in $\lceil 1,\alpha,0 \rceil$. Deze induceert op $\lfloor 0,0,1 \rfloor$ volgens (9.4) de afbeelding $\xi \mapsto \alpha\xi$. $\rho\delta\rho^{-1}$ is de dilatatie van $\mathcal{P}S$ met as $\lfloor 1,0,0 \rfloor$ en centrum $\lceil 1,0,0 \rceil$ die $\lceil 1,\alpha,0 \rceil$ overvoert in $\lceil 1,\sigma(\alpha),0 \rceil$. Wij krijgen dan weer twee relaties, n.l.

$$\rho\delta\rho^{-1}(\sigma(\xi)) = \rho\delta(\xi) = \rho(\alpha\xi) = \sigma(\alpha\xi),$$

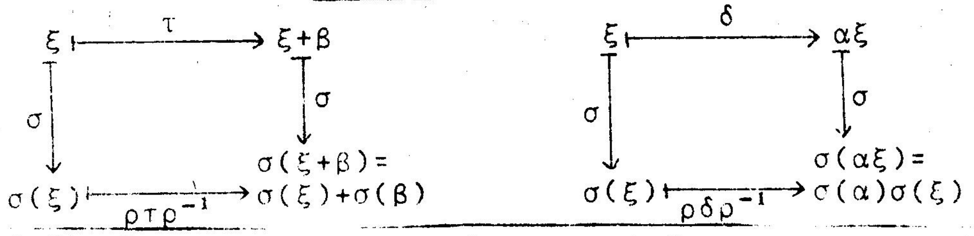
en

$$\rho\delta\rho^{-1}(\sigma(\xi)) = \sigma(\alpha)\sigma(\xi),$$

waaruit volgt

$$\sigma(\alpha\xi) = \sigma(\alpha)\sigma(\xi).$$

Conclusie: σ is een <u>isomorfisme</u> van K op L.



Wij definiëren nu een σ $\frac{1}{2}$-lineaire afbeelding A van R op S door

$$A\lceil \xi_0,\xi_1,\xi_2 \rceil = \lceil \sigma(\xi_0), \sigma(\xi_1), \sigma(\xi_2) \rceil.$$

A induceert een collineatie $\lceil A \rceil$ van $\lceil K^3 \rceil$ op $\lceil L^3 \rceil$. Vergelijken wij deze met ρ !

$$\lceil A \rceil \lceil e_i \rceil = \lceil f_i \rceil = \rho \lceil e_i \rceil, \quad i = 0,1,2.$$

$$\lceil A \rceil \lceil e_0+e_1+e_2 \rceil = \lceil f_0+f_1+f_2 \rceil = \rho \lceil e_0+e_1+e_2 \rceil$$

$$\lceil A \rceil \lceil 1,\xi,0 \rceil = \lceil 1,\sigma(\xi),0 \rceil = \rho \lceil 1,\xi,0 \rceil$$

$\rho^{-1}\lceil A\rceil$ is dus een collineatie van $\mathbb{P}R$ op zichzelf die alle punten van $\lceil 0,0,1\rceil$ vastlaat, d.w.z. $\rho^{-1}\lceil A\rceil$ is een kwasiperspectiviteit met as $\lfloor 0,0,1\rfloor$. Deze kwasiperspectiviteit laat echter buiten de as nog twee punten vast, te weten $\lceil 0,0,1\rceil$ en $\lceil 1,1,1\rceil$, dus is volgens (3.5) de identiteit. Dit houdt in dat $\rho=\lceil A\rceil$, waarmee het bewijs voltooid is.

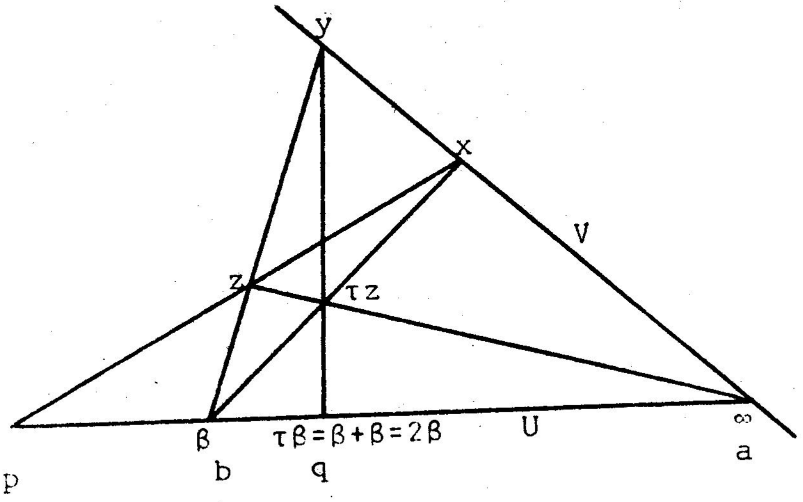
We hebben gebruikt dat als ϕ een kwasiperspectiviteit is met as V en centrum p, ook $\rho\phi\rho^{-1}$ een kwasiperspectiviteit is met as ρV en centrum ρp (ga na).

Uit (9.5) blijkt dat $A \mapsto \lceil A\rceil$ een homomorfisme is van $\Gamma L(R)$ op de collineatiegroep $\Gamma P(R)$, met volgens (9.2) kern $H(R)$. Dus

(9.6) $\Gamma P(R) \cong P\Gamma L(R) = \Gamma L(R)/H(R)$.

De toevoeging $\lceil A\rceil \mapsto \sigma$ als A σ-$\frac{1}{2}$lineair is, definieert eveneens volgens (9.2) eenduidig een homomorfisme $\Gamma P(R) \to \mathrm{Aut}\, K$ met kern $GP(R)$: $\lceil A\rceil$ is projectief $\Leftrightarrow \sigma = I$, want:
een projectieve $\lceil A\rceil$ is ook te schrijven als $\lceil B\rceil$ met lineaire B (7.1) en dan is ook A lineair (9.2); omgekeerd (7.3).

Wij keren nog even terug naar de meetkundige interpretatie van de optelling in het coördinatenlichaam K. Neem een rechte U en introduceer een projectieve coördinaat op U. Kies een rechte $V \neq U$ door ∞. Wij hebben gezien dat de transvectie τ met as V die o overvoert in β, op U de afbeelding $\xi \to \xi + \beta$ induceert. Wij construeren nu $\tau\beta = 2\beta$: zie figuur 20. $x,y,z,\tau z$ is een construerende vierhoek voor het harmonische viertal $0,\infty,2\beta,\beta$.



Figuur 20.

Geven we drie verschillende punten a,b,p op een rechte de coördinaten ∞,1,0, dan krijgt het volgens (4.3) eenduidig bepaalde vierde harmonische q waarvoor H(p,a,q,b) de coördinaat 2. Dus p = q dan en slechts dan als 2 = 0 in K; dit geldt dan voor elk harmonisch viertal in $\mathbb{P}$R.
In de optelgroep K^+ van het lichaam K hebben alle $\lambda \neq 0$ dezelfde orde (dat is de kleinste $n \in \mathbb{N}$ waarvoor $n\lambda = 0$, als dit nooit gebeurt ∞: $n\lambda = (n.1) = 0 \Leftrightarrow n.1 = 0$, waar $n \in \mathbb{N}, 1 \in K$); deze heet de karakteristiek kar(K). Als 2 = 0 is kar(K) = 2. Is p_1,p_2,p_3,p_4 een construerende vierhoek voor H(p,a,q,b), dan zijn de diagonaalpunten van de vierhoek p_1,p_2,p_3,p_4 de punten a,b en $(p_1 \oplus p_3) \cap (p_2 \oplus p_4)$, dus a = b is equivalent met: de diagonaalpunten van een vierhoek zijn collineair. Het bovenstaande vatten wij samen in de volgende stelling.

(9.7) De volgende eigenschappen van een projectief vlak $\mathbb{P}$R over een lichaam K zijn equivalent.
(i) kar(K) $\neq$ 2.
(ii) Er is een drietal verschillende collineaire punten p,a,q zodat uit H(p,a,q,b) volgt $a \neq b$.
(iii) Voor elk drietal verschillende collineaire punten p,a,q volgt uit H(p,a,q,b) dat $a \neq b$.
(iv) Er is een (niet ontaarde) vierhoek waarvan de diagonaalpunten niet collineair zijn.
(v) F. Van elke (niet ontaarde) vierhoek zijn de diagonaalpunten niet collineair.

De eigenschap F. zullen we als axioma voor het projectieve vlak genomen om coördinatenlichamen met karakteristiek 2 uit te sluiten, en heet het axioma van FANO.
Wij kunnen nu een antwoord geven op de vraag die wij aan het einde van § 4 onbeantwoord hadden gelaten, n.l. wanneer de in (4.8) genoemde projectiviteit π van een rechte op zichzelf, waarvoor geldt: $\pi p = p$, $\pi q = q$, $H(p,x;q,\pi x)$ voor $x \neq p,q$, een involutie is. Wij wisten al dat $\pi^2 = 1$. Uit (9.7) volgt dat $\pi \neq 1$ dan en slechts dan als kar(K) $\neq$ 2. Dus:

(9.8) De in (4.8) genoemde projectiviteit is een involutie dan en slechts dan als kar(K) $\neq$ 2.

Voor een projectiviteit π met $\pi^2 = I$ en vaste punten p,q geldt volgens (8.7), (8.8): $DV(p,x,q,\pi x) = DV(\pi p,\pi x,\pi q,\pi^2 x) = DV(p,\pi x,q,x) = DV(p,x,q,\pi x)^{-1}$, dus $DV(p,x,q,\pi x)^2 = 1$, $DV(p,x,q,\pi x) = 1$ of -1. Als $DV(p,x,q,\pi x) = 1$ voor één $x \neq p,q$ is $\pi x = x$, dus volgens (8.2) $\pi = I$. Bij een involutie π met vaste punten p,q is dus $DV(p,x,q,\pi x) = -1$ voor alle $x \neq p,q$. Is p,a,q,b een harmonisch viertal, dan zien we aan de in (4.8) genoemde projectiviteit:

(9.9) H(p,a,q,b) <u>dan en slechts dan als</u> DV(p,a,q,b) = -1.

Dit geldt ook als kar(K) = 2, omdat dan $-1 = 1$. Verder volgt nu:

(9.10) <u>Er is precies één involutie</u> π <u>van een rechte</u> $p \oplus q$ <u>met twee gegeven vaste punten</u> p,q; <u>voor deze geldt</u> $H(p,x,q,\pi x)$ <u>voor</u> $x \neq p,q$.

<u>Opmerking</u>. Het verband tussen collineaties en semilineaire afbeeldingen is ook geldig bij een niet commutatief coördinatenlichaam. Het verband tussen harmonische ligging en dubbelverhouding blijft ook bestaan, daar -1 op zichzelf een complete klasse van geconjugeerde elementen vormt (vgl. opmerking aan het einde van § 8). Een σ-½lineaire transformatie induceert dan een projectiviteit als σ een inwendig automorfisme is.

<u>Opgaven</u>.

9.1. Op een projectieve rechte zijn gegeven de punten met coördinaten 0, ∞ en α. Construeer het punt $-\alpha$. Teken zowel een projectieve figuur als een affiene, waarbij de oneigenlijke rechte als as van de transvectie fungeert die 0 in α overvoert.

9.2. Gegeven de punten $0,1,\infty$ en $\alpha \neq 0$ op een rechte. Construeer α^{-1}, zowel in een projectieve als in een affiene figuur.

9.3. τ is een collineatie van een projectief vlak op zichzelf zodat de restrictie van τ tot een rechte L een projectiviteit is van L op τL. Bewijs dat τ een projectiviteit is.

9.4. Zij τ een collineatie van een projectief vlak $\mathbb{P}R$ op een vlak $\mathbb{P}S$ en U een rechte in $\mathbb{P}R$. Op U en op τU voeren we een projectieve coördinaat in. Toon aan dat de restrictie van τ tot U dan beschreven wordt door

$$\xi \to \frac{\alpha\sigma(\xi)+\beta}{\gamma\sigma(\xi)+\delta},$$

waarbij σ het isomorfisme van K op L is zodat τ door een σ-$\frac{1}{2}$ lineaire afbeelding van R in S wordt geïnduceerd.

9.5. Zij τ een collineatie geïnduceerd door een σ-$\frac{1}{2}$ lineaire afbeelding. Bewijs dat voor collineaire punten p,a,q,b geldt:
DV $(\tau p,\tau a,\tau q,\tau b) = \sigma(DV(p,a,q,b))$.

9.6. Bewijs met behulp van stelling (9.9.) nogmaals stelling (4.7.). (Zie ook opgave 8.7).

9.7. We gaan bewijzen dat iedere collineatie van het reële projectieve vlak $\mathbb{P}\mathbb{R}^3$ op zichzelf een projectiviteit is:
a) voor ieder automorfisme σ van $\mathbb{R}$ geldt $\xi < \eta \Rightarrow \sigma(\xi) < \sigma(\eta)$ (bedenk dan $\xi < \eta \Leftrightarrow (\exists\zeta \neq 0)\eta-\xi = \zeta^2$).
b) laat zien dat $\sigma = I$ (eerst $\sigma(n) = n$ voor $n \in \mathbb{Z}$, dan $\sigma(\frac{m}{n}) = \frac{m}{n}$ voor $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, tenslotte $\sigma(\xi) = \xi$ voor alle $\xi \in \mathbb{R}$).
c) bewijs de bewering.

§10. Dualiteiten en polariteiten.

Nu gaan we ook de theorie van duale $\frac{1}{2}$ lineaire afbeeldingen gebruiken; zie aanhangsel "Halflineaire algebra" 6.
R en S zijn weer 3-dimensionale vectorruimten over K resp. L, met duale ruimten R^* resp. S^*. In R en R^* en evenzo in S en S^* gebruiken we duale basis.

Zij $\lceil A \rceil : \mathfrak{P}R \to \mathfrak{P}S$ een collineatie, geïnduceerd door de σ-$\frac{1}{2}$ lineaire $A : R \to S$; deze beschijft het gedrag op de punten: $\lceil x \rceil \to \lceil Ax \rceil$. Wat met de rechten van $\mathfrak{P}R$ gebeurt zien we in de bijbehorende collineatie $\mathfrak{P}R^* \to \mathfrak{P}S$ van de duale vlakken. Volgens (9.5) wordt deze geïnduceerd door een $\frac{1}{2}$ lineaire afbeelding van R^* op S^*. Uit Ha (29) volgt met $v = A^{*-1}u$:

$$\langle A^{*-1}u | Ax \rangle = \sigma\langle u | x \rangle \text{ voor alle } u \in R^*,\ x \in R,$$

en wegens (6.1) is dan

$$\lfloor A^{*-1} \rfloor \lfloor u \rfloor \,|\, \lceil A \rceil \lceil x \rceil \Leftrightarrow \lfloor u \rfloor \,|\, \lceil x \rceil .$$

In de notatie van (3.3) geven $\phi_1 = \lceil A \rceil$, $\phi_2 = \lfloor A^{*-1} \rfloor$, beide werkend op 1-dimensionale lineaire deelruimten, samen de collineatie van $P\langle R^*, R\rangle$ op $P\langle S^*, S\rangle$. Deze wordt zo geïnduceerd door het paar σ-$\frac{1}{2}$ lineaire bijectie $\left\{\begin{array}{l} R \xrightarrow{A} S \\ R^* \xrightarrow[A^{*-1}]{} S^*. \end{array}\right.$

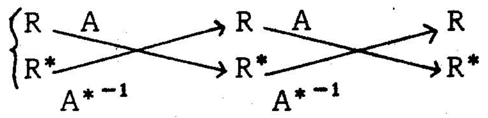
Een correlatie van $\mathfrak{P}R$ op $\mathfrak{P}S$ voert punten van $\mathfrak{P}R$ in rechten van $\mathfrak{P}S$, dat zijn punten van $\mathfrak{P}S^*$; en rechten van $\mathfrak{P}R$ in punten van $\mathfrak{P}S$, dat zijn rechten van $\mathfrak{P}S^*$. Dit is hetzelfde als een collineatie van $\mathfrak{P}R$ op $\mathfrak{P}S^*$, en wordt dus geïnduceerd door een $A : R \to S^*$, en de werking hiervan op de rechten door $A^{*-1} : R^* \to S$. De correlatie van $P\langle R^*, R\rangle$ op $P\langle S^*, S\rangle$ beschijven we door het paar

$$\left\{\begin{array}{l} R \xrightarrow{A} S^* \\ R^* \xrightarrow[A^{*-1}]{} S \end{array}\right.$$

De compositie van twee correlaties is een collineatie.

(10.1) Definitie.
Een dualiteit is een correlatie van een vlak op zich.
Een semipolariteit is een dualiteit δ waarvoor $\delta^2 = I$.

Onder welke voorwaarden geldt dit? δ wordt geïnduceerd door een paar A, A^{*-1}, dus δ^2 door $A^{*-1}A$, AA^{*-1}.



Nu moet $\lceil A^{*-1}\rceil \lceil A\rceil = I$, dus $\lceil A\rceil = \lceil A^*\rceil$; volgens (9.2) is dan $A^* = \lambda A$ en $\sigma^{-1} = \sigma$. (bedenk dat $A^* : R \to R^*$ σ^{-1} $-\frac{1}{2}$ lineair is).
We onderschieden nu twee mogelijkheden.

a) $\langle Ax|x\rangle = 0$ voor alle $x \in R$. Nu is $\langle A(x+y)|x+y\rangle = \langle Ax|x\rangle + \langle Ax|y\rangle + \langle Ay|x\rangle + \langle Ay|y\rangle = 0$, dus $\langle Ax|y\rangle + \langle Ay|x\rangle = 0$ voor alle $x,y \in R$. Daaruit volgt $\sigma(\langle Ay|x\rangle) = \langle A x|y\rangle = \lambda\langle Ax|y\rangle = -\lambda\langle Ay|x\rangle$ (waar in afwijking van Ha (29) zowel A als A^* in de linker factor staan, omdat we steeds R^* links, $R = R^{**}$ rechts schrijven; vergelijk Ha (36)).
Er zijn $x_0, y_0 \in R$ waarvoor $\langle Ay_0|x_0\rangle = 1$; daarmee blijkt $1 = \sigma(1) = -\lambda$, $\lambda = -1$. Verder is $\sigma \circ Ay = -Ay$ voor alle $y \in R$; links is wegens $\sigma = \sigma^{-1}$ lineair in y, dus rechts ook: A is lineair. In dit geval is

$$A^* = -A, \ \sigma = I.$$

Wordt A in coördinaten gegeven door de 3×3 matrix (α_{ij}), dan $A^* = -A$ door $(\alpha_{ij})^t = (-\alpha_{ij})$. Nu is
$\det(\alpha_{ij}) = \det(\alpha_{ij})^t = \det(-\alpha_{ij}) = (-1)\det(\alpha_{ij}) = -\det(\alpha_{ij})$,
dus $2\det(\alpha_{ij}) = 0$, zodat $\det(\alpha_{ij}) = 0$ als $\mathrm{kar}(K) \neq 2$, in strijd met A bijectief.

<u>Opmerking</u>.
Een dergelijke <u>nulverwantschap</u> is wel mogelijk in projectieve ruimten $\mathfrak{P}R$ van oneven dimensie (waarbij we uitgaan van een vectorruimte R van even dimensie). We zullen deze voor het projectieve vlak door (10.4) opnieuw uitsluiten.

b) Er is een $a \in R$ waarvoor $\langle Aa|a\rangle = \alpha \neq 0$. Stel $B = \alpha^{-1}A$, zodat $B^* = \sigma^{-1}(\alpha^{-1})A = \sigma^{-1}(\alpha^{-1})\lambda A = \sigma^{-1}(\alpha^{-1})\lambda\alpha B = \mu B$ waar $\mu = \sigma^{-1}(\alpha^{-1})\lambda\alpha$ (met Ha(33)); dan is $\lceil B\rceil = \lceil A\rceil$, $\langle Ba|a\rangle = 1$, en enerzijds $\langle B^*a|a\rangle = \mu\langle Ba|a\rangle = \mu$, anderzijds $\langle B^*a|a\rangle = \sigma\langle Ba|a\rangle = \sigma(1) = 1$, dus $\mu = 1$, $B = B^*$. We vinden dus

(10.2) <u>Iedere semipolariteit</u> δ <u>van een projectief vlak</u> $\mathfrak{P}R$ <u>wordt geïnduceerd door een</u> σ-$\frac{1}{2}$ <u>lineaire bijectie</u> $A : R \to R^*$ <u>met</u> $A^* = A$; $\sigma^2 = I$.

<u>Opmerking</u>.
Dit geldt over een niet-commutatief lichaam met die wijziging dat A antilineair en σ anti-automorf wordt (zie Ha 7).

Wordt A in coördinaten gegeven door Ha(25) : $(\alpha_{ij}) \bullet \sigma^{(3)}$, dan geldt voor de 3 × 3 matrix

$$(\alpha_{ij}) = (\sigma(\alpha_{ij}))^t, \text{ d.w.z. } \alpha_{ji} = \sigma(\alpha_{ij}).$$

Een hermietse transformatie $H = H^*$ van de unitaire C^3 heeft matrix (α_{ij}) met $\alpha_{ji} = \bar{\alpha}_{ij}$; we identificeren C^{3*} met C^3 door het inproduct: $\langle x|y\rangle = (\bar{x}|y)$. De correlatie $\lceil x\rceil \mapsto \lfloor H\bar{x}\rfloor = \{y\ (Hx|y) = 0\} = \lceil Hx\rceil^\perp$ (orthoplement voor het inproduct), $\lfloor y\rfloor = \lceil\bar{y}\rceil^\perp \mapsto \lceil H^{-1}\bar{y}\rceil$ is een semipolariteit.

Merk op dat $(\alpha H)^* = \bar{\alpha}H$ niet weer hermiets is, tenzij $\alpha = \bar{\alpha}$.

We nemen verder aan, dat δ een semipolariteit is.

Twee punten p en q heten toegevoegd of loodrecht t.o.v. δ, als $p|\delta q$; notatie $p \perp q$. Wegens $\delta^2 = 1$ is dit een symmetrische relatie, want als $p \perp q$, dan $p|\delta q$, dus $\delta p|\delta^2 q = q$. Duaal voor rechten. $\not\perp$ betekent: niet $\perp$. Is p een punt, dan heet δp de poollijn van p, en p de pool van δp. We bewijzen nu eerst twee stellingen over semipolariteiten.

(10.3.) Is δ een semipolariteit en geldt voor een punt p: $p \perp p$, dan is $q \not\perp q$ voor alle punten $q \perp p$, $q \neq p$.

Bewijs. Voor $q \perp p$ geldt: $\delta q|p$. Als $q \neq p$, dan $\delta q \neq \delta p$. Aangezien $q|\delta p$, is dus $q \not| \delta q$.

Een onmiddellijk gevolg hiervan is

(10.4) Is δ een semipolariteit, dan is er een punt p zodat $p \not\perp p$.

Zij p nu een punt zodat $p \not\perp p$. We bekijken de afbeelding π van de rechte δp op zichzelf gedefinieerd door: $\pi x = \delta x \cap \delta p$ voor $x|\delta p$. Deze afbeelding willen we aan een nader onderzoek onderwerpen. We kiezen in R een basis en in R^* de duale basis zó dat $p = \lceil 1,0,0\rceil$ en $\delta p = \lfloor 1,0,0\rfloor$. In de bij A behorende matrix (α_{ij}) op deze bases is $\alpha_{10} = \alpha_{20} = 0$, dus wegens $\alpha_{ji} = \sigma(\alpha_{ij})$ ook $\alpha_{01} = \alpha_{02} = 0$:

$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}.$$

Voor $x = \lceil 0,\xi_1,\xi_2 \rceil$ is

$$\delta x = \lfloor 0, \alpha_{11}\sigma(\xi_1) + \alpha_{12}\sigma(\xi_2), \alpha_{21}\sigma(\xi_1) + \alpha_{22}\sigma(\xi_2) \rfloor$$

$$\pi x = \delta x \cap \lfloor 1,0,0 \rfloor = \lceil 0, -\alpha_{21}\sigma(\xi_1) - \alpha_{22}\sigma(\xi_2), \alpha_{11}\sigma(\xi_1) + \alpha_{12}\sigma(\xi_2) \rceil$$

Op $\lfloor 1,0,0 \rfloor$ voeren we als projectieve coördinaat in:

$$\lceil 0,0,1 \rceil \to \infty,\ \lceil 0,\xi_1,\xi_2 \rceil \to \xi_1^{-1}\xi_2 \text{ voor } \xi_1 \neq 0.$$

In deze coördinaat wordt π dus voorgesteld door

$$\pi\xi = \frac{-\alpha_{12}\sigma(\xi) - \alpha_{11}}{\alpha_{22}\sigma(\xi) + \alpha_{21}},$$

waarbij we $\sigma(\infty) = \infty$ moeten stellen (waarom?). De coëfficienten $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$ zijn bepaald (op een factor na) door $\pi(0), \pi(1)$ en $\pi(\infty)$. De projectiviteit ρ met $\rho(\xi) = \pi(\xi)$ voor $\xi = 0, 1$ en ∞ wordt voorgesteld door

$$\rho\xi = \frac{-\alpha_{12}\xi - \alpha_{11}}{\alpha_{22}\xi + \alpha_{21}}.$$

Is π een projectiviteit van δa op zichzelf, dan moet $\pi = \rho$ zijn, dus $\xi = \rho^{-1}\pi\xi = \sigma(\xi) = \xi$ voor alle ξ, d.w.z. $\sigma = I_K$. Dit hangt niet af van het punt a.

(10.5) Zij $\delta = \lceil A \rceil$ een semipolariteit, waarbij A σ-lineair is. Voor een punt $a \not{I} a$ bekijken we de afbeelding van δa op zichzelf gedefinieerd door

$$\pi x = \delta x \cap \delta a \text{ voor } x | \delta a.$$

π is een projectiviteit van δa op zichzelf dan en slechts dan als σ = identiteit, dus als A lineair is.

Opmerking.

De veronderstelling dat K commutatief is kan hier niet gemist worden: over een niet-commutatief lichaam moet σ een anti automorfisme zijn, waaraan I_K niet voldoet.

Voor een lineaire $A : R \to R^*$ met $A^* = \lambda A$ is $A = A^{**} = \lambda^2 A$, zodat $\lambda^2 = 1$, $\lambda = 1$ of -1. Als $A^* = -A$ is $\langle Ax|y\rangle = \langle A^*y|x\rangle = -\langle Ay|x\rangle$,

speciaal $\langle Ax|x\rangle = -\langle Ax|x\rangle$, zodat als kar(K) $\neq 2$ $\langle Ax|x\rangle = 0$, $\delta\lceil x\rceil \mid \lceil x\rceil$, $\lceil x\rceil \perp \lceil x\rceil$ voor alle $x \in R$. Dit is wegens (10.4) uitgesloten. Als kar(K) = 2 is $-1 = 1$, dus ook dan is $A^* = A$.

Een lineair geïnduceerde semipolariteit heet een polariteit of projectieve polariteit.

(10.6) Een lineaire bijectie $R \to R^*$ induceert een polariteit dan en slechts dan als $A = A^*$.

Zo'n A wordt in coördinaten gegeven door een symmetrische matrix

$(\alpha_{ij}) = (\alpha_{ij})^t$, d.w.z. $\alpha_{ji} = \alpha_{ij}$.

Iedere symmetrische transformatie $A = A^t$ van de $\mathbb{R}^3$ met inproduct levert een polariteit: $\lceil x\rceil \mapsto \lfloor Ax\rfloor = \lceil Ax\rceil^{\perp}$, $\lceil y\rceil \mapsto \lceil y\rceil = \lceil A^{-1}y\rceil$.

Zij δ een polariteit, a een punt met $a \nmid a$. We onderwerpen de projectiviteit π van δa op zichzelf met $\pi x = \delta x \cap \delta a$ aan een nader onderzoek. πx is het punt van δa zodat $\pi x \perp x$. Omdat $\perp$ een symmetrische relatie is, is $\pi^2 = 1$. Is het mogelijk dat $\pi = I$?

Veronderstel dat π reeds 2 vaste punten $b,c|\delta a$ heeft; voor $x|\delta a$ is $\delta x|a$, dus $\delta b = a\oplus b$, $\delta c = a\oplus c$. Kies de coördinaten zo dat $a = \lceil 1,0,0\rceil$, $b = \lceil 0,1,0\rceil$, $c = \lceil 0,0,1\rceil$ dan is $\delta a = \lfloor 1,0,0\rfloor$, $\delta b = \lfloor 0,0,1\rfloor$, $\delta c = \lfloor 0,1,0\rfloor$, dus A heeft de matrix

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(wegens de symmetrie is $\alpha_{23} = \alpha_{32}$, we mogen deze 1 nemen).
Voor $x = \lceil 0,1,\xi\rceil \mid \delta a$ is $\delta x = \lfloor 0,\xi,1\rfloor$, $\pi x = \lceil 0,1,-\xi\rceil$. Nu is $\pi x = x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \xi = -\xi$, dus als kar(K) $\neq 2$ alleen voor $\xi = 0$ en $\xi = \infty$, π is een involutie; als kar(K) = 2 voor alle $\xi \in K$ en ∞, $\pi = I$. Heeft geen 2 vaste punten, dan is π zeker een involutie. We hebben gevonden

kar(K) $\neq 2 \Rightarrow \pi$ involutie (met ≤ 2 vaste punten),

kar(K) $= 2 \Rightarrow \pi$ involutie (met < 2 vaste punten) of $\pi = I$.

We noemen π, indien $\neq I$, de door δ geïnduceerde poolinvolutie op de rechte δa.

Beschouw een willekeurige involutie π op een rechte L. Kies een projectieve coördinaat op L zo dat π 0 en ∞ verwisselt. Dan heeft π de gedaante

$$\pi\xi = \frac{\rho}{\xi}, \quad \rho \neq 0$$

zoals men inziet door in de algemene formule voor een projectiviteit op L voor ξ de waarden 0 en ∞ in te vullen. De eventuele vaste punten ξ van π worden gegeven door de vergelijking

$$\xi^2 = \rho.$$

Is kar(K) $\neq$ 2, dan heeft deze vergelijking 0 of 2 oplossingen, nl. $\pm\sqrt{\rho}$. Is kar(K) = 2, dan is er 0 of 1 oplossing. We vatten onze resultaten samen in de volgende twee stellingen.

(10.7) Zij L een rechte in een projectief vlak $\mathcal{P}(R)$, π een involutie op L. Is kar(K) $\neq$ 2, dan heeft π 0 of 2 vaste punten; is kar(K) = 2, dan 0 of 1.

(10.8) Zij δ een polariteit in een projectief vlak $\mathcal{P}R$, a een punt zodat a $\not|$ a. De afbeelding π van δa op zichzelf zij gedefinieerd door $\pi x = \delta x \cap \delta a$ voor $x | \delta a$. Is kar(K) $\neq$ 2, dan is π een involutie; is kar(K) = 2, dan is π een involutie of de identiteit. Is π een involutie, dan heet π de poolinvolutie op δa (m.b.t. δ).

Alle in (10.8) genoemde mogelijkheden voor π (involutie met 0 of 2 vaste punten als kar(K) $\neq$ 2, involutie met 0 of 1 vast punt of de identiteit als kar(K) = 2) komen inderdaad voor.

Opgaven.

10.1. Beschouw de polariteit $\delta = \lceil A \rceil$ in $\mathcal{P}\mathbb{R}^3$ met matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bewijs:

(i) de rechte $\lfloor 1,0,0 \rfloor$ incideert niet met z'n pool. De poolinvolutie op $\lfloor 1,0,0 \rfloor$ heeft twee vaste punten,

(ii) de rechte $\lfloor 0,0,1 \rfloor$ incideert niet met z'n pool. De poolinvolutie op $\lfloor 0,0,1 \rfloor$ heeft geen vaste punten.

Beschouw nu de polariteit $\delta = \lceil A \rceil$ in $\mathbb{P}\mathbb{R}^3$ met A = I. Bewijs:
(iii) er is geen rechte die met zijn pool incideert.

10.2. Zij K een lichaam van karakteristiek 2 dat een element α bevat dat geen kwadraat is in K (dergelijke lichamen bestaan, maar dat bewijzen we hier niet). Zij $\delta = \lceil A \rceil$ de polariteit in $\mathbb{P}K^3$ met matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} .$$

(i) Bewijs dat $\lfloor 0,0,1 \rfloor$ niet met z'n pool incideert en dat de afbeelding π als in stelling (10.7) een involutie is met één vast punt.
(ii) Bewijs dat $\lfloor 1,0,0 \rfloor$ niet met z'n pool incideert en dat de afbeelding π als in stelling (10.7) een involutie is zonder vaste punten.

10.3. Zij K een lichaam van karakteristiek 2. Beschouw de polariteit $\delta = \lceil A \rceil$ in $\mathbb{P}K^3$ met

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Bewijs:
(i) $\lfloor 1,0,0 \rfloor$ incideert niet met z'n pool.
(ii) De afbeelding π op $\lfloor 1,0,0 \rfloor$ is de identiteit, m.a.w. elk punt van $\lfloor 1,0,0 \rfloor$ incideert met z'n poollijn.
(iii) Buiten de rechte $\lfloor 1,0,0 \rfloor$ zijn er geen punten die met hun poollijn incideren.

10.4. Zij K een lichaam van karakteristiek 2, R een 3-dimensionale K-vectorruimte. We willen de mogelijke polariteiten δ in $\mathbb{P}R$ klassificeren.
(i) Veronderstel er is een lijn L met de volgende eigenschappen: L incideert niet met z'n pool, alle punten van L incideren met hun poollijn. Kies een basis in R zó dat

$$\lceil e_0 \rceil = \text{pool van } L, \ \lceil e_1 \rceil \text{ en } \lceil e_2 \rceil | L.$$

Laat zien dat $\delta = \ulcorner A \urcorner$ met

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Bewijs dat geen enkel punt buiten L met z'n poollijn incideert.
(ii) Stel er is géén lijn L met de eigenschappen als in (i) genoemd. Veronderstel verder: er is een punt p dat met z'n poollijn incideert. Kies een lijn $L \mid p$, $L \neq \delta p$. Bewijs eerst: $L \nmid \delta L$. Kies een basis in R zodat

$$\ulcorner e_0 \urcorner = \text{pool van } L, \ \ulcorner e_1 + e_2 \urcorner = p, \ \delta \ulcorner e_1 \urcorner = \llcorner e_1 \lrcorner, \ \delta \ulcorner e_2 \urcorner = \llcorner e_2 \lrcorner .$$

Waarom is dit mogelijk? Laat zien dat $\delta = \ulcorner A \urcorner$ met

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Laat zien: als α een kwadraat is in K, dan is er een lijn (welke?) die niet met z'n pool incideert en waarvan alle punten met hun poollijn incideren. Aangezien we dit uitgesloten hadden in onze veronderstellingen, zien we dus: α is geen kwadraat in K. Toon aan dat p het enige punt is dat met z'n poollijn incideert.

(iii) De derde mogelijkheid is dat geen enkel punt met z'n poollijn incideert. Wat in dit geval precies de mogelijkheden zijn, hangt geheel van de structuur van het lichaam K af. We volstaan met te vermelden dat dit geval zich echt voor kan doen bij bepaalde coordinatenlichamen K.

§ 11. Kegelsneden

We nemen voortaan aan dat de karakteristiek van het coördinatenlichaam $\neq 2$ is, m.a.w., dat aan het axioma van Fano voldaan is.

(11.1) Definitie. Is $\delta = \ulcorner A \urcorner$ een polariteit, dan heet de verzameling van punten $p = \ulcorner x \urcorner$ zodat $p \perp p$, ofwel $p \mid \delta p$, een kegelsnede; deze heeft de vergelijking $\langle Ax \mid x \rangle = 0$.

Een kegelsnede wordt dus gegeven door een homogene kwadratische vergelijking $\langle Ax \mid x \rangle = 0$ met willekeurige symmetrische A zodat $\det A \neq 0$.

De kwadriek van R, die aan deze vergelijking voldoet, is een kegel met top 0; de beschrijvenden hiervan zijn de projectieve punten, die de kegelsnede van het projectieve vlak vormen. Merk op dat voor sommige polariteiten de bijbehorende kegelsnede leeg kan zijn. Is dit niet het geval, dan is de polariteit door z'n kegelsnede volledig vastgelegd, zoals we zullen zien.

Beschouw een niet-lege kegelsnede C; neem een punt $p \in C$. Voor een punt $q|\delta p$, $q \neq p$ is $q \notin C$ volgens (10.3): de rechte δp heeft alleen p met C gemeen. Een andere rechte $L|p$, $L \neq \delta p$ heeft pool $l = \delta L|\delta p$, $l \neq p$, dus $l \not| l$, $l \not| L$. Derhalve induceert δ volgens (10.8) op L een poolinvolutie, met tenminste één vast punt p, dus volgens (10.7) met twee. Iedere rechte $L \neq \delta p$ door p bevat precies 2 punten van L. Het aantal punten op C is dus gelijk aan het aantal rechten door een punt, dus ook aan het aantal punten op een rechte. δp heet de raaklijn in p aan C. Is L geen raaklijn aan C, dan heeft L 0 of 2 snijpunten met C. Het kan zijn dat het eerste geval zich niet voordoet, b.v. als het coördinatenlichaam bestaat uit de complexe getallen; dan heeft iedere involutie vaste punten.

(11.2) Een rechte L heeft met C 0, 1 of 2 punten gemeen. L heeft met C precies 1 punt gemeen als L raaklijn is. Door ieder punt van C gaat precies één raaklijn.

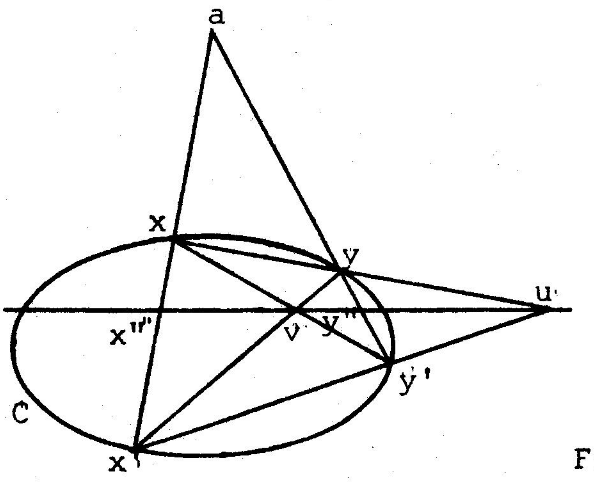
Hoeveel raaklijnen gaan er door een punt $p \notin C$? Is L zo'n raaklijn door p, dan ligt de pool van L op L en ook op δp, dus die pool is $\delta p \cap L$. Op δp liggen 0 of 2 punten die op hun poollijn liggen, dus

(11.3) Door een punt $p \notin C$ gaan 0 of 2 raaklijnen. De raakpunten daarvan zijn de snijpunten van C met de poollijn van p.

We laten nu zien hoe C de polariteit bepaalt.

(11.4) Is $a \in C$, dan is de poollijn van a de raaklijn aan C in a. Is $a \notin C$ en zijn x en y twee punten van C zodat $a \oplus x$ en $a \oplus y$ raken aan C, dan is $x \oplus y$ de poollijn van a. Is $a \notin C$ en zijn x en $y \in C$ zodat $a \oplus x$ en $a \oplus y$ niet raken aan C, en a, x en y niet collineair zijn,

dan nemen we voor x' het snijpunt $\neq$ x van a $\oplus$ x met C, voor y' het snijpunt $\neq$ y van a $\oplus$ y met C. De poollijn van a is dan de lijn u + v met u = (x$\oplus$y) $\cap$ (x'$\oplus$y') en v = (x$\oplus$y') $\cap$ (x'$\oplus$y). Merk op dat voor a $\notin$ C tenminste één van de twee laatstgenoemde mogelijkheden zich moet voordoen.



Figuur 21.

Bewijs. De eerste twee beweringen zijn al bewezen. Beschouw het laatste geval. Laat u$\oplus$v de lijn a$\oplus$x snijden in x", a$\oplus$y in y". Dan H(a,x,x",x') en H(a,y,y",y'). De poolinvoluties a+x en a+y hebben vaste punten x,x' resp. y,y'; volgens (9.10) voegen ze a aan x" resp. y" toe, dus x" en y" liggen op de poollijn van a. Wegens het axioma van Fano is u $\neq$ v, dus u+v is de poollijn van a.

De verzameling van alle rechten door een punt p heet de waaier met een centrum p.

(11.5) Zij L een rechte, p een punt niet op L. De afbeelding

$$x \mapsto p \oplus x \ , \quad x \mid L$$

is een projectiviteit van L op de waaier door p, d.w.z. wordt door een lineaire transformatie geïnduceerd.

Bewijs. Neem basispunten zodat p = $\lceil 1,0,0 \rceil$, L = $\lfloor 1,0,0 \rfloor$.
Voor x = $|0,\xi_1,\xi_2|$ is dan

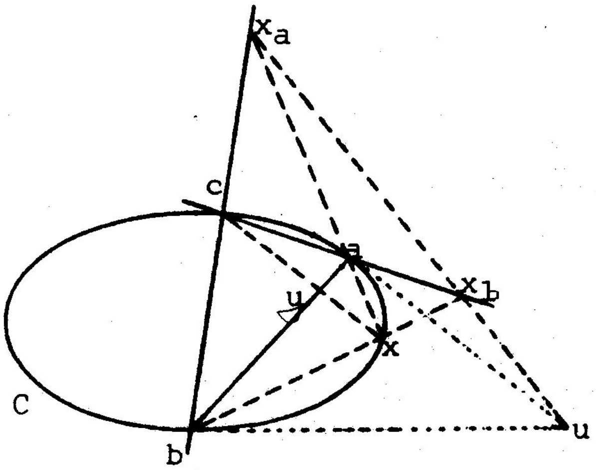
$$p \oplus x = \lfloor 0,\xi_2,-\xi_1 \rfloor .$$

Neem een punt a $\in$ C. Is x $\in$ C, dan is a + x bepaald voor x $\neq$ a. Als x = a, nemen we voor a + x de raaklijn in a aan C. Doorloopt x de kegelsnede, dan doorloopt a + x dus de hele waaier met centrum a.

(11.6) <u>Stelling van STEINER</u>. <u>Gegeven twee vaste punten</u> a <u>en</u> b <u>op</u> C, $a \neq b$. <u>Doorloopt</u> x <u>de hele</u> C, <u>dan is de afbeelding</u>

$$a \oplus x \mapsto b \oplus x$$

<u>een projectiviteit van de waaier door</u> a <u>op de waaier door</u> b.



Figuur 22.

<u>Bewijs</u>. Kies c op C, $\neq a$, $\neq b$. Stel $(a\oplus x) \cap (b\oplus c) = x_a$, $(b\oplus x) \cap (a\oplus c) = x_b$, $y = (c\oplus x) \cap (a+b)$, dan is $\delta y = x_a \oplus x_b$. Zij $u = \delta(a\oplus b)$. Uit $y | a\oplus b$ volgt $u | x_a \oplus x_b$. De afbeelding $x_a \mapsto x_b$ is dus een perspectiviteit van $b\oplus c$ op $a\oplus c$ met centrum u. Volgens (11.5) zijn

$$a \oplus x \mapsto x_a$$

en

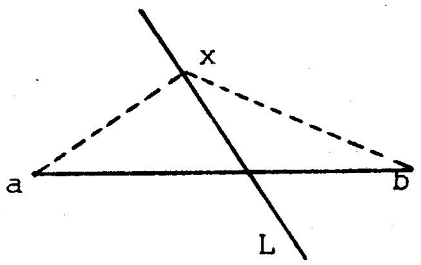
$$b \oplus x \mapsto x_b$$

projectiviteiten.
Daaruit volgt dat $a \oplus x \mapsto b \oplus x$ een projectiviteit is.

Merk op dat de boven gedefinieerde projectiviteit

$$a \oplus x \mapsto b \oplus x$$

geen perspectiviteit is. Was dat nl. wèl het geval, dan bestond de meetkundige plaats van x uit twee snijdende rechten, nl. $a + b$ en de perspectiviteitsas L. De rechte L zou dan geheel op de kegelsnede liggen, in tegenspraak met (11.2). Men noemt een paar snijdende lijnen wel een <u>ontaarde</u> kegelsnede. Er hoort een ontaarde polariteit bij. Wij beschouwen voortaan alleen niet ontaarde kegelsneden.

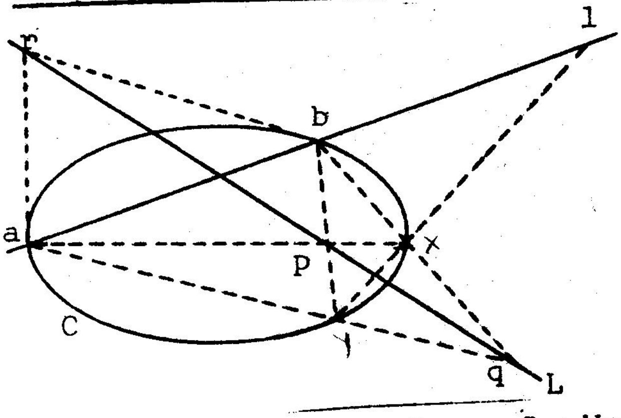


Figuur 23.

(11.7) <u>Zij C een kegelsnede in een projectief vlak, a en b op C, $a \neq b$. Zij r het snijpunt van de raaklijnen in a en b en $L|r$. Doorloopt x de kegelsnede C dan is</u>

$$(a \oplus x) \cap L \mapsto (b \oplus x) \cap L$$

<u>de poolinvolutie op L.</u>



Figuur 24.

<u>Bewijs</u>. Zij l de pool van L. Noem een punt x op C. Laat $l \oplus x$ met C nog het punt y gemeen hebben. $p = (a\oplus x)\cap(b\oplus y)$ en $q = (a\oplus y)\cap(b\oplus x)$ liggen dan op L. De poollijn van p is $l + q$.

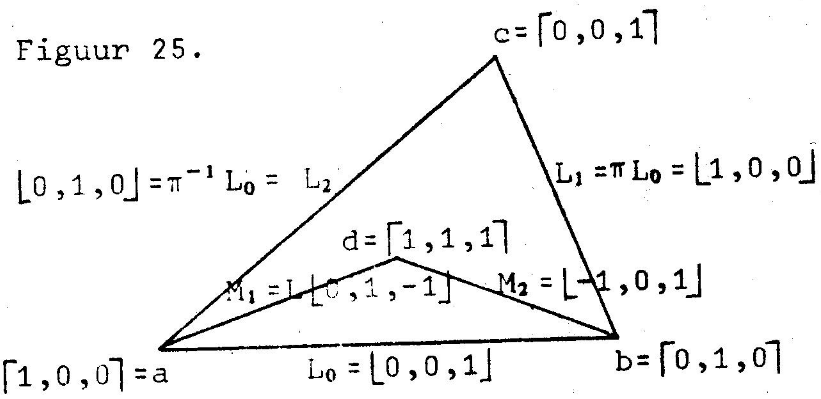
Van de stelling van Steiner bestaat ook een omkering, die we nu bewijzen. We merken eerst op, dat duaal met (8.3) geldt: een projectiviteit tussen twee waaiers die de verbindingsrechten van de centra van de waaiers vastlaat is een perspectiviteit.

(11.8) <u>Zijn a en b twee vaste punten, $a \neq b$, en is π een projectiviteit van de waaier door a op die door b, die geen perspectiviteit is. Dan is de verzameling van de punten</u>

$$L \cap \pi L, \quad L|a$$

<u>een kegelsnede door a en b.</u>

Figuur 25.



<u>Bewijs</u>. Noem $a + b = L_0$.

$\pi L_0 = L_1$ (L_0 als lijn door a)

$\pi^{-1} L_0 = L_2$ (L_0 als lijn door b).

$M_1 | a, M_1 \neq L_0, L_2$.

$\pi M_1 = M_2$.

$c = L_1 \cap L_2$.

$d = M_1 \cap M_2$.

Kies coördinaten zodat $a = \ulcorner e_0 \urcorner$, $b = \ulcorner e_1 \urcorner$, $c = \ulcorner e_2 \urcorner$, $d = \ulcorner e_0+e_1+e_2 \urcorner$

$$\pi : \lfloor 0,0,1 \rfloor \mapsto \lfloor 1,0,0 \rfloor$$
$$\lfloor 0,1,0 \rfloor \mapsto \lfloor 0,0,1 \rfloor$$
$$\lfloor 0,1,-1 \rfloor \mapsto \lfloor -1,0,1 \rfloor$$

Dus algemeen:

$$\pi : \lfloor 0,\alpha_1,\alpha_2 \rfloor \mapsto \lfloor \alpha_2,0,\alpha_1 \rfloor$$

$$\lfloor 0,\alpha_1,\alpha_2 \rfloor \cap \lfloor \alpha_2,0,\alpha_1 \rfloor = \lceil \alpha_1^2,\alpha_2^2,-\alpha_1\alpha_2 \rceil$$

De verzameling van deze punten wordt gegeven door de vergelijking

$$\xi_0\xi_1 - \xi_2^2 = 0,$$

die de (niet ontaarde) kegelsnede voorstelt, behorende bij de de polariteit $\lceil A \rceil$ met op deze basis de matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Een kegelsnede is dus bepaald door twee waaiers en een projectiviteit daartussen, dus door twee toppen van waaiers en verder de beelden van drie lijnen in de ene waaier, dus door drie punten op de kegelsnede. Collineaties voeren projectieve waaiers over in projectieve waaiers. Dit is de duale uitspraak van: Is $\pi : L \to M$ een projectiviteit van rechten, ρ een collineatie, dan is $\rho\pi\rho^{-1} : \rho L \to \rho M$ weer een projectiviteit (Ga na; bekijk eerst een perspectiviteit). We krijgen dus

(11.9) Door vijf punten gaat precies één kegelsnede; deze is ontaard dan en slechts dan als er onder die punten tenminste drie collineair zijn. Een punt met voorgeschreven raaklijn geldt hierbij als twee punten. Collineaties voeren kegelsneden over in kegelsneden.

Een belangrijke stelling voor constructies is de volgende:

(11.10) Stelling van PASCAL. Zes punten a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 liggen op een kegelsnede dan en slechts dan als de punten

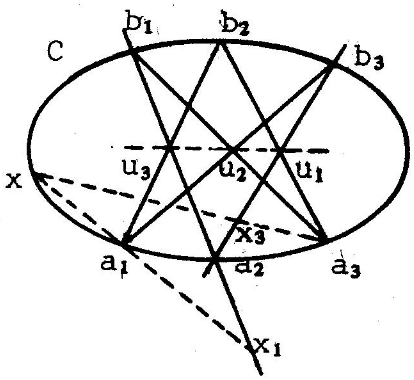
$$u_1 = (a_2 \oplus b_3) \cap (a_3 \oplus b_2),\ u_2 = (a_3 \oplus b_1) \cap (a_1 \oplus b_3),\ u_3 = (a_1 \oplus b_2) \cap (a_2 \oplus b_1)$$

collineair zijn.

Bewijs. Veronderstel eerst dat a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 op een kegelsnede C liggen. Neem een willekeurig punt x op C.

$x_1 = (a_1 \oplus x) \cap (a_2 \oplus b_1)$,

$x_3 = (a_3 \oplus x) \cap (a_2 \oplus b_3)$.



Figuur 26.

Doorloopt x de hele C, dan is

$$x_1 \mapsto a_1 \oplus x$$

een projectiviteit van $a_2 \oplus b_1$ op de waaier door a_1,

$$a_1 \oplus x \mapsto a_3 \oplus x$$

een projectiviteit van de waaier door a_1 op die door a_3,

$$a_3 \oplus x \mapsto x_3$$

een projectiviteit van de waaier door a_3 op $a_2 \oplus b_3$. Dus is

$$\pi : x_1 \mapsto x_3$$

een projectiviteit van $a_2 \oplus b_1$ op $a_2 \oplus b_3$. Voor $x = a_2$ krijgen we $x_1 = x_3 = a_2$, dus is π zelfs een perspectiviteit

$$\pi b_1 = (a_3 \oplus b_1) \cap (a_2 \oplus b_3)$$

$$\pi\big((a_1 \oplus b_3) \cap (a_2 \oplus b_1)\big) = b_3$$

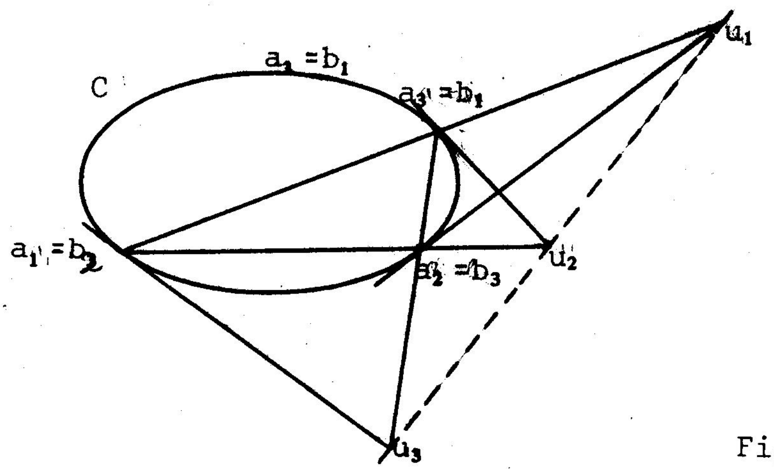
Het centrum van π is dus u_2. Verder is

$$\pi u_3 = u_1.$$

Dus liggen u_1, u_2 en u_3 op één rechte.

Laat omgekeerd gegeven zijn dat u_1, u_2, u_3 op één rechte liggen.
Neem voor C de kegelsnede door a_1, a_2, a_3, b_1, b_2.
Te bewijzen dat b_3 op C ligt. Zij b_3' het snijpunt van $a_2 + b_3'$ met C. a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3' geven dan drie collineaire punten u_1, u_2', u_3. Maar $u_2' = (u_1 \oplus u_3) \cap (b_1 \oplus a_3) = u_2$, dus $b_3' = b_3$.

De bovenstaande stelling blijft geldig als zekere punten samenvallen. Is b.v. $a_1 = b_2$, dan nemen we voor $a_1 + b_2$ weer de raaklijn in a_1 aan C. Evenzo als $a_1 = b_2$, $a_3 = b_1$ of $a_1 = b_2$, $a_2 = b_1$.



Figuur 27.

In deze gevallen gaat het bovenstaande bewijs gewoon door. Anders ligt het als er drie paren samenvallende punten zijn: $a_1 = b_2$, $a_2 = b_3$, $a_3 = b_1$, dan moeten we een ander bewijs geven. Neem $u_1 = (a_2 \oplus b_3) \cap (a_3 \oplus b_2)$, waarbij $a_2 \oplus b_3$ weer de raaklijn in $a_2 = b_3$ is, $u_3 = (a_1 \oplus b_2) \cap (a_2 \oplus b_1)$, $\bar{u}_2 = (u_1 \oplus u_3) \cap (a_1 \oplus b_3)$. We moeten aantonen dat $\bar{u}_2 \oplus a_3$ de raaklijn in a_3 is. Stel $\bar{u}_2 \oplus a_3$ snijdt C nog in $\bar{b}_1 \neq a_3$.

Pas de stelling van Pascal dan toe op de punten $a_1 = b_2$, $a_2 = b_3$, a_3, $\bar{b}_1$. We vinden dan drie collineaire punten

$$\bar{u}_3 = (a_1 \oplus b_2) \cap (a_2 \oplus \bar{b}_1)$$

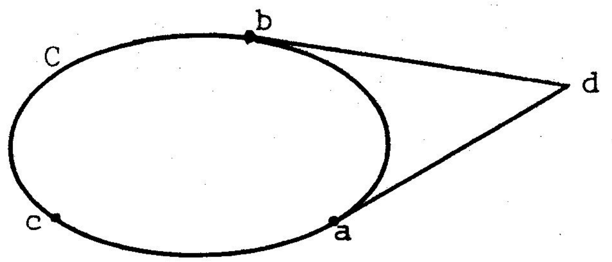
$$\bar{u}_1 = (a_2 \oplus b_3) \cap (a_3 \oplus b_2) = u_1$$

$$\bar{u}_2 = (a_3 \oplus b_1) \cap (a_1 \oplus b_3).$$

Dus $\bar{u}_3 = (u_1 \oplus \bar{u}_2) \cap (a_1 \oplus b_2) = u_3$. Daaruit volgt $\bar{b}_1 \oplus a_2 =$ $= \bar{u}_3 \oplus a_2 = u_3 \oplus a_2 = b_1 \oplus a_2$. Dus $\bar{b}_1 = b_1 = a_3$.
Tegenspraak. Dus is $\bar{u}_2 \oplus a_3$ de raaklijn in a_3. Formuleer en bewijs zelf het omgekeerde van dit geval.

Wanneer de kegelsnede C ontaard is reduceert de stelling van Pascal zich tot die van Pappus-Pascal (zie opgave 2.2). Het bovenstaande bewijs is in dat geval ook goed, aangezien dat steunt op de stelling van Steiner, die ook geldig is voor ontaarde kegelsnede.

(11.11) Zijn C en C' twee niet lege kegelsneden in een projectief vlak, beide niet ontaard. Dan is er een projectiviteit die C op C' afbeeldt.



Figuur 28.

Bewijs. Op C kiezen we drie verschillende punten a, b en c, op C' : a', b' en c'.
d = snijpunt van de raaklijnen aan C in a en b, d' = snijpunt van de raaklijnen aan C' in a' en b'. Er is een projectiviteit π die a $\to$ a', b $\to$ b', c $\to$ c', d $\to$ d'. πC is een kegelsnede die met C' drie punten en de raaklijn in twee daarvan gemeen heeft, dus valt πC samen met C.

Alle kegelsneden van een projectief vlak $\mathcal{P}$ vormen één klasse voor de aequivalentierelatie: $C \sim C' \Leftrightarrow (\exists \pi \in G\mathcal{P})\pi C = C'$; de projectieve groep $G\mathcal{P}$ werkt transitief in de verzameling kegelsneden, ze vormen één baan.

Opmerking. De aanname dat het coördinatenlichaam commutatief is, kan niet gemist worden in de theorie van de kegelsneden.

Opgaven.

11.1. Wat blijft er over van de stelling van Pascal, als b.v. $a_1 = b_1$ in bovenstaande notatie?

11.2. Gegeven vijf punten op een kegelsnede C en een lijn L door één van die punten. Construeer het tweede snijpunt van L met C.

11.3. Zelfde vraag als gegeven zijn vier punten en de raaklijn in één daarvan, of drie punten en de raaklijnen in twee daarvan.

11.4. Gegeven van een kegelsnede twee punten met daarin de raaklijnen, en een derde raaklijn. Construeer het raakpunt van de laatste gebruik makend van het laatste geval in het bewijs van de stelling van Pascal. [Aanwijzing: noem de gegeven punten $a_1 = b_2$ en $a_2 = b_3$ en de raaklijnen daarin $a_1 + b_2$ en $a_2 + b_3$, resp. Noem de derde gegeven raaklijn L. Neem $u_2 = (a_1+b_3) \cap L$. Beschouw de perspectiviteit π van $a_1 + b_2$ op $a_2 + b_3$ met u_2 als centrum, en de projectiviteit τ van de waaier door a_2 op de waaier door a_1 gedefinieerd door $\tau(a_2+x) = a_1 + \pi x$, als $x \mid a_1 + b_2$. Toon aan dat τ een perspectiviteit is. Construeer de perspectiviteitsas van τ. Het snijpunt daarvan met L is het raakpunt van L aan de kegelsnede; bewijs dit.]

11.5 Zij ϕ een quasiperspectiviteit met as P en centrum p, en C een kegelsnede. Bewijs:

$$\phi C \subset C \Leftrightarrow P \text{ poollijn van } p \;\&\; \phi^2 = I.$$

§ 12. Lijnkegelsneden.

Uit de definitie van een dualiteit is duidelijk, dat het hieraan duale begrip weer een dualiteit is. Zij δ een semipolariteit, $a \not| a$. De afbeelding ρ van de waaier met centrum a op zichzelf gegeven door

$$\rho : L \mapsto \delta L \oplus a \text{ voor } L|a$$

is de duale van de in (10.5) beschouwde $\pi : x \mapsto \delta x \cap \delta a$ voor $x|\delta a$, en hangt hiermee samen door $\rho(x \oplus a) = \delta x = \pi x \oplus a$. Dus π en ρ zijn tegelijk projectief (ga na). Het begrip polariteit is zelfduaal. Voor een polariteit δ is ρ, indien $\neq I$, de poolinvolutie in de waaier met centrum a.

Het duale van een kegelsnede is dus de verzameling van lijnen die met hun pool incideren bij een gegeven polariteit; we noemen dit een lijnkegelsnede. Blijkbaar is een lijnkegelsnede niets anders dan de collectie van alle raaklijnen aan een kegelsnede. Door dualiseren van stellingen over kegelsneden krijgen we dus stellingen over de raaklijnen aan kegelsneden, b.v. de snijpunten van een rechte L met een kegelsnede C, behorende bij de dualiteit δ, met $\delta L \notin C$, zijn de vaste punten van de poolinvolutie op L, wordt duaal: de raaklijnen uit een punt p aan C, $p \notin C$ zijn de vaste rechten van de poolinvolutie in de waaier p. Uit de stelling van Steiner (11.6) krijgen we op deze manier:

(12.1) Gegeven twee vaste raaklijnen A en B aan een kegelsnede C, $A \neq B$. Doorloopt X alle raaklijnen aan C, dan is de afbeelding

$$A \cap X \mapsto B \cap X$$

een projectiviteit van A op B.

Uit (11.8) krijgen we

(12.2) Zijn A en B twee vaste rechten, $A \neq B$, en is π een projectiviteit van A op B die geen perspectiviteit is. De verzameling van alle lijnen

$$x \oplus \pi x, \quad x \in A$$

bestaat dan uit alle raaklijnen van een kegelsnede waaraan A en B raken.

Verder geeft (11.9)

(12.3) Bij vijf lijnen is er precies één kegelsnede die daar aan raakt; deze is ontaard dan en slechts dan als van die vijf lijnen er tenminste drie door één punt gaan. Een lijn met gegeven raakpunt telt hierbij voor twee lijnen.

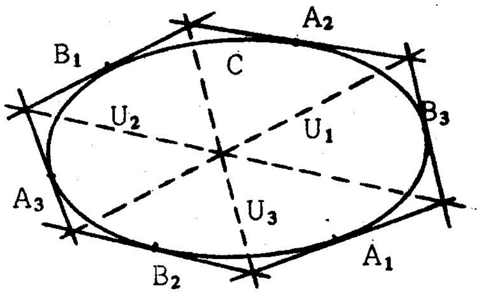
Zeer belangrijk is de duale van de stelling van Pascal (11.9).

(12.4) Stelling van Brianchon. Zes lijnen A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 zijn dan en slechts dan raaklijnen aan een kegelsnede als de rechten

$$U_1 = (A_2 \cap B_3) \oplus (A_3 \cap B_2),\ U_2 = (A_3 \cap B_1) \oplus (A_1 \cap B_3),$$

$$U_3 = (A_1 \cap B_2) \oplus (A_2 \cap B_1),$$

door één punt gaan.



Figuur 29.

De stelling van Brianchon blijft geldig als zekere lijnen samenvallen, mits we weer het raakpunt als snijpunt van de samenvallende lijnen interpreteren. We kunnen met deze stelling constructies van raaklijnen enzovoorts uitvoeren.

Opgaven

12.1. Gegeven vijf raaklijnen aan een kegelsnede en een punt op één daarvan. Construeer de tweede raaklijn door dat punt.

12.2. Gegeven drie raaklijnen aan een kegelsnede C en de raakpunten op twee daarvan. Construeer de raaklijn door een gegeven punt op één van de gegeven raaklijnen.

12.3. Los het probleem van opgave 11.4 op met de stelling van Brianchon.

12.4. Bewijs stelling (12.1) rechtstreeks met (11.6) en eigenschappen van polariteiten, zonder stellingen uit § 11 te dualiseren. M.a.w., gebruik alles van §11, maar niet het dualiteitsprincipe.

§ 13. Projectiviteiten tussen kegelsneden.

(13.1) Definitie. Gegeven twee kegelsneden C_1 en C_2 en twee punten, a_1 op C_1 en a_2 op C_2. Een afbeelding π van C_1 op C_2 heet een projectiviteit, als de afbeelding

$$a_1 \oplus x \mapsto a_2 \oplus \pi x, \quad x \in C_1,$$

een projectiviteit is van de waaier door a_1 op die door a_2.

Vervangen we a_1 door een punt a_1' op C_1, a_2 door a_2' op C_2, dan zijn

$$a_1 \oplus x_1 \mapsto a_1' \oplus x_1, \quad x_1 \in C_1$$

en

$$a_2 \oplus x_2 \mapsto a_2' \oplus x_2, \quad x_2 \in C_2$$

projectiviteiten volgens de stelling van Steiner (11.6). Dus is ook

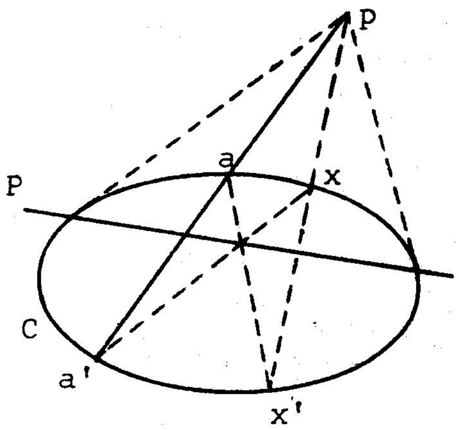
$$a_1' \oplus x \mapsto a_2' \oplus \pi x, \ x \in C_1$$

een projectiviteit. Dit betekent

(13.2) De punten a_1 en a_2 op C_1 resp. C_2 mogen in definitie (13.1) willekeurig gekozen worden.

Het meest interesseren ons involutorische projectiviteiten van een kegelsnede op zichzelf. De volgende stelling geeft daarvan een beschrijving.

(13.3) Is C een kegelsnede en p een punt niet op C. Dan is de afbeelding die aan $x \in C$ het tweede snijpunt van $p \oplus x$ met C (= x als $p \oplus x$ raakt aan C) toevoegt een projectieve involutie. Elke involutie op C is van deze gedaante. p heet het centrum, de poollijn P van p de as van de involutie.



Figuur 30.

Bewijs. Zij π de afbeelding die we met een punt $p \notin C$ krijgen op de beschreven wijze. Dat $\pi^2 = 1$, $\pi \neq 1$, is duidelijk. We hoeven dus nog slechts te bewijzen dat π een projectiviteit is. Neem een punt a op C zodat $p + a$ niet raakt aan C. a' = tweede snijpunt van $p \oplus a$ met C. P = poollijn van p t.o.v. C.

Beschouw een willekeurige x op C, $x' = \pi x$. $a + x$ en $a' + x'$ snijden elkaar dan op P volgens (11.4). De afbeelding

$$a \oplus x \to a' \oplus x'$$

is dus een perspectiviteit, dus π is een projectiviteit.

Zij omgekeerd π een projectieve involutie op C. Neem punten a en b op C zodat $a \neq \pi a$, $a \neq b$, $a \neq \pi b$ (dus ook $b \neq \pi a$). Neem $p = (a \oplus \pi a) \cap (b \oplus \pi b)$, waarbij we weer afspreken: als $b = \pi b$, dan is $b \oplus \pi b$ de raaklijn in b. p definieert een involutie π' op C. Nu is

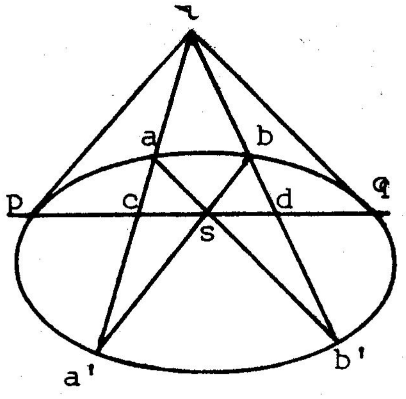
$$\pi' x = \pi x \text{ voor } x = a, b, \pi a.$$

Aangezien een projectiviteit door de actie op drie punten volledig bepaald is, is $\pi' = \pi$.

In een waaier kunnen we een projectieve coördinaat invoeren door deze op te vatten als een rechte van het duale vlak. Vier rechten door één punt bezitten een dubbelverhouding, die gelijk is aan die van hun snijpunten met een willekeurige rechte, en invariant is bij projectiviteiten van waaiers. Voor vier punten p, a, q, b op een kegelsnede C definiëren we hun dubbelverhouding door

(13.4) $$DV_C(p,a,q,b) = DV(t\oplus p, t\oplus a, t\oplus q, t\oplus b) \quad \text{met een willekeurige } t \in C.$$

Wegens de stelling van Steiner (11.6) hangt de dubbelverhouding in de waaier t niet van de keuze van t op C af. Bij projectiviteiten tussen kegelsneden is de dubbelverhouding weer invariant.



Figuur 31.

Zij r de pool van $p \oplus q$, en c,d de snijpunten van $r \oplus a$ resp. $r \oplus b$ met $p \oplus q$; dan is

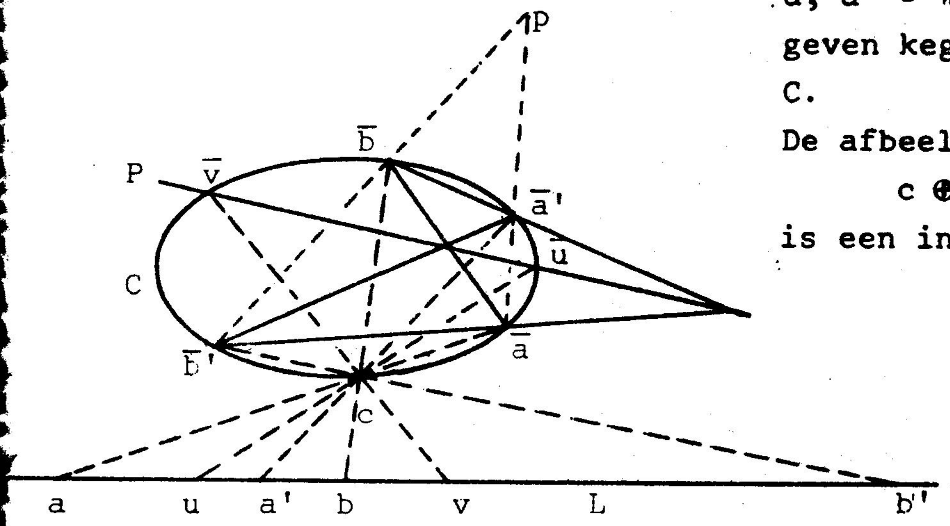
(13.5) $$DV_C(p,a,q,b)^2 = DV(p,c,q,d).$$

Want als a',b' de tweede snijpunten van $r \oplus a$ resp. $r \oplus b$ met C zijn, ligt $s = (a \oplus b') \cap (a' \oplus b)$ op p+q. Nu is $DV_C(p,a,q,b) = DV(a' \oplus p, a' \oplus a, a' \oplus q, a' \oplus b) = DV(p,c,q,s)$, en evenzo $DV_C(p,a,q,b) = DV(b' \oplus p, b' \oplus a, b' \oplus q, b' \oplus b) = DV(p,s,q,d)$.
De bewering volgt nu uit de productformule (8.6).

We behandelen nu het probleem, van een gegeven involutie op een rechte (of in een waaier, of op een kegelsnede) de vaste punten te construeren als we alleen twee paar toegevoegde punten kennen.
Zij op de rechte L een involutie π gegeven door de puntenparen a, $a' = \pi a$, b, $b' = \pi b$. Zij C een gegeven kegelsnede. Neem een punt c op C.
De afbeelding

$$c \oplus x \to c \oplus \pi x, \quad x \in L,$$

is een involutie in de waaier door c.



Figuur 32.

Dus, als $c \oplus a$ de kegelsnede C nog snijdt in $\bar{a}$, $c \oplus a'$ in $\bar{a}'$, $c \oplus b$ in $\bar{b}$, $c \oplus b'$ in $\bar{b}'$, dan definieert de involutie in de waaier door c een involutie $\bar{\pi}$ op C met

$$\bar{\pi}\,\bar{a} = \bar{a}', \quad \bar{\pi}\,\bar{b} = \bar{b}'.$$

De as P van $\bar{\pi}$ gaat door $(\bar{a}' \oplus \bar{b}) \cap (\bar{a} \oplus \bar{b}')$ en door $(\bar{a} \oplus \bar{b}) \cap (\bar{a}' \oplus \bar{b}')$.

Snijdt P de kegelsnede C in $\bar{u}$ en $\bar{v}$, dan zijn $\bar{u}$ en $\bar{v}$ de vaste punten van $\bar{\pi}$, dus

$$u = (c \oplus \bar{u}) \cap L, \quad v = (c \oplus \bar{v}) \cap L$$

de vaste punten van π.
Voor deze constructie moeten we dus een kegelsnede C gegeven hebben zodanig dat de snijpunten van C met een willekeurige rechte bepaald kunnen worden. Meestal nemen we voor C een cirkel. Alnaargelang P 0 of 2 snijpunten met C heeft, heeft π 0 of 2 vaste punten. Waarom kan P niet raken aan C?
Veel constructie-opgaven komen neer op het bepalen van de vaste punten van een involutie. Dat we hiervoor een kegelsnede nodig hebben en 't niet met de lineaal alleen afkunnen, is als volgt in te zien. Het snijden van een kegelsnede met een rechte komt, in coördinaten uitgeschreven, neer op het oplossen van een kwadratische vergelijking. Aangezien het bepalen van de verbindingslijn van twee punten en het snijden van twee lijnen neerkomt op het oplossen van lineaire vergelijkingen, kunnen we daarmee nooit een kwadratische vergelijking oplossen. Immers, lineaire vergelijkingen met b.v. rationale coëfficienten hebben rationale oplossingen, een kwadratische vergelijking met rationale coëfficienten kan irrationale oplossingen hebben. Zo heeft de vergelijking

$$x^2 - 2 = 0$$

twee irrationale oplossingen, n.l. $\pm\sqrt{2}$. Het tweede vaste punt van een projectiviteit waarvan reeds een vast punt gegeven is, is te berekenen uit een lineaire vergelijking, en dus alleen met de liniaal te construeren (opgave 8.4).

Opgaven.

13.1 In een projectief vlak zijn A, B, C, D vier rechten door een punt p, en a, b, c, d hun snijpunten met een rechte P niet door P.
Bewijs: DV(A,B,C,D) = DV(a,b,c,d).

13.2 Zij C een kegelsnede in het reële projectieve vlak, p, q, a punten van C, r de pool van $p \oplus q$, c het snijpunt van $r \oplus a$ met $p \oplus q$ (als bij (13.5)), en d een willekeurig punt van $p \oplus q$.
Bewijs: $r \oplus d$ snijdt C $\Leftrightarrow$ DV(p,c,q,d) $>$ 0.

Bij de volgênde opgaven is een vaste kegelsnede C_0 gegeven, waarvan we de snijpunten met een willekeurige lijn kunnen bepalen.

13.3. Gegeven vijf punten op een kegelsnede D en een lijn L, niet door één van die punten. Construeer de snijpunten van L met D. Aanwijzing: beschouw de involutie π op L die aan $x \mid L$ het snijpunt van L met de poollijn van x t.o.v. D toevoegt. Wat zijn de vaste punten van π?

13.4. Gegeven een rechte L en vier punten niet op L, waarvan géén drie op één rechte, die we a_2, a_3, b_1, b_3 noemen. Bewijs eerst dat de afbeelding π van L op zichzelf, die een punt $x \mid L$ afbeeldt op het tweede snijpunt van L met de kegelsnede door a_2, a_3, b_1, b_3, x, een projectiviteit is.

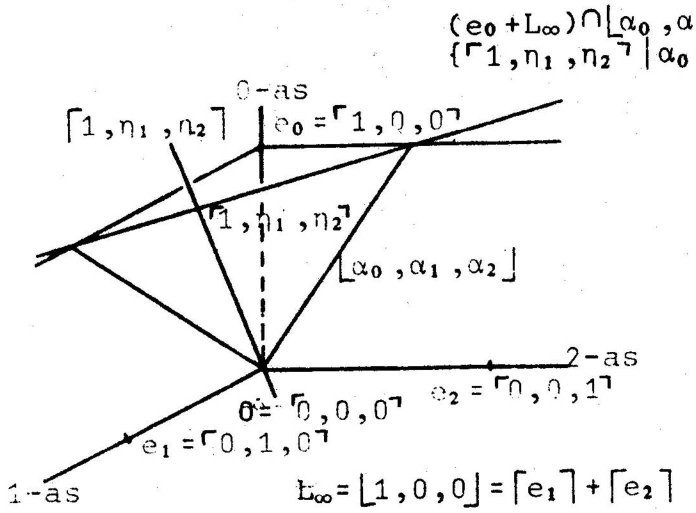
[Aanwijzing: noem $x = a_1$, $\pi x = b_2$. Teken een Pascalfiguur waarin alle vaste lijnen getrokken zijn en alle van a_1 of b_2 afhankelijke lijnen gestippeld. π is produkt van drie perspectiviteiten die in deze figuur zonder veel moeite aan te geven zijn.] Construeer nu de raakpunten met L van kegelsneden door a_2, a_3, b_1, b_3 die aan L raken. Hoeveel oplossingen zijn er mogelijk?

§14 Het affiene vlak. Affiene kegelsneden.

(14.1) Definitie.

Zij $\mathcal{P}$ een projectief vlak, L_∞ een rechte van $\mathcal{P}$. Het affiene vlak $\mathcal{P}\setminus L_\infty$ met oneigenlijke rechte L_∞ is de verzameling punten p van $\mathcal{P}$, $p \not| L_\infty$ en rechten L van $\mathcal{P}$, $L \neq L_\infty$, met de incidentierelatie van $\mathcal{P}$; deze heten affien punt resp. affiene rechte. De punten van L_∞ heten oneigenlijk punt van $\mathcal{P}\setminus L_\infty$. Twee affiene rechten L,M van $\mathcal{P}\setminus L_\infty$ heten evenwijdig, geschreven $L /\!/ M$ als $L \cap M | L_\infty$.

In $\mathcal{P}\setminus L_\infty$ geldt:
Twee verschillende affiene punten incideren met precies één affiene rechte.
Twee verschillende affiene rechten incideren met hoogstens één affien punt; evenwijdige rechten hebben affien geen snijpunt.
Het dualiteitsprincipe (6.3) geldt niet voor een affien vlak.
In het schoofmodel kunnen wij $\mathcal{P}R\setminus L_\infty$ beschrijven met een 2-dimensionale lineaire varieteit e_0+L_∞, $e_0 \neq L_\infty$ (vlak van R, niet door 0): een affien punt $\lceil x \rceil$, $x \notin L_\infty$ snijdt e_0+L_∞ in een (vector)punt van R, een affiene rechte $L \neq L_\infty$ heeft met e_0+L_∞ als doorsnede een 1-dimensionale lineaire varieteit, (lijn van R).



Figuur 33.

Wij kiezen in $\mathcal{P}R$ coördinaten zó dat $L_\infty = \lfloor 1,0,0 \rfloor$, $e_0 = \lceil 1,0,0 \rceil$. De affiene punten zijn dan eenduidig te schrijven als $\lceil 1,n_1,n_2 \rceil$, dus staan (na keuze van coördinaten) in 1-1 correspondentie met de punten van de 2-dimensionale vectorruimte K^2:

$$\lceil 1,n_1,n_2 \rceil \leftrightarrow \ulcorner n_1,n_2 \urcorner .$$

Een rechte $\neq L_\infty$ in $\mathcal{P}R$ wordt beschreven door $\lfloor\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2\rfloor$ met $\ulcorner\alpha_1,\alpha_2\urcorner \neq \ulcorner 0,0\urcorner$. De affiene punten daarop zijn de punten $\lceil 1,\eta_1,\eta_2\rceil$ waarvoor geldt:

$$\alpha_0 + \alpha_1\eta_1 + \alpha_2\eta_2 = 0.$$

Dit zijn precies de punten die corresponderen met de punten $\ulcorner\eta_1,\eta_2\urcorner$ van een 1-dimensionale lineaire variëteit in K^2. Evenwijdigheid van de rechten $\lfloor\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2\rfloor$ en $\lfloor\beta_0,\beta_1,\beta_2\rfloor$ wordt gegeven door de voorwaarde $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1 \neq 0$, m.a.w.

$\ulcorner\alpha_1,\alpha_2\urcorner$ en $\ulcorner\beta_1,\beta_2\urcorner$ afhankelijk (gelijke normaalrichting),

$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2}$ (gelijke richtingscoëfficient).

Een collineatie ϕ van een affien vlak $\mathcal{P}\setminus L_\infty$ is weer een bijectie, die affiene punten op affiene punten, affiene rechten op affiene rechten afbeeldt met behoud van de incidentie. Snijpunten gaan over in snijpunten, dus evenwijdige rechten in evenwijdige rechten. Dus ϕ bepaalt een afbeelding van de oneigenlijke punten, en is daarmee eenduidig voort te zetten tot een collineatie van het projectieve vlak $\mathcal{P}$; deze zullen we als regel dezelfde naam ϕ geven. Omgekeerd is de restrictie van een collineatie ϕ van $\mathcal{P}$ waarvoor $\phi L_\infty = L_\infty$ een collineatie van $\mathcal{P}\setminus L_\infty$.

(14.2) Definitie.

Een affiniteit of affiene transformatie is een collineatie van het affiene vlak op zichzelf, die de restrictie is van een projectiviteit.

Zij π een affiniteit van $\mathcal{P}R\setminus L_\infty$, restrictie van de projectiviteit $\lceil A\rceil$ van $\mathcal{P}R$, waarin A een lineaire transformatie van R is (7.1). In de boven gebruikte coördinaten betekent $\pi L_\infty = L_\infty$ dat A een matrix heeft van de gedaante

$$\begin{pmatrix} \alpha_{00} & 0 & 0 \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{20} & \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}.$$

Omdat A bijectief is, det $A \neq 0$, mogen we $\alpha_{00} = 1$ stellen; dan is A door π eenduidig bepaald. In het affiene vlak induceert π de afbeelding

$$\lceil 1,\eta_1,\eta_2\rceil \mapsto \lceil 1,\alpha_{10}+\alpha_{11}\eta_1+\alpha_{12}\eta_2,\ \alpha_{20}+\alpha_{21}\eta_1+\alpha_{22}\eta_2\rceil.$$

Dit correspondeert in K^2 met de transformatie

$$\ulcorner\eta_1,\eta_2\urcorner \mapsto \ulcorner\alpha_{11}\eta_1+\alpha_{12}\eta_2,\ \alpha_{21}\eta_1+\alpha_{22}\ 2\urcorner + \ulcorner\alpha_{10},\alpha_{20}\urcorner.$$

Dit wil zeggen: een affiene transformatie is op precies één manier te schrijven als product $\pi = T_a B$ van een translatie T_a en een lineaire transformatie B van K^2:

$$T_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_{10} & 1 & 0 \\ \alpha_{20} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$ in K^3, de homogene coördinaten van PR.

$$T_a : x \mapsto x + \ulcorner\alpha_{10}, \alpha_{20}\urcorner, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$ in K^2, de affiene coördinaten van $PR \setminus L_\infty$.

Een translatie van $\mathcal{P}R \setminus L_\infty$ is een transvectie van $\mathcal{P}R$ met as L_∞ (ga na).

De affiniteiten vormen de affiene groep $GA_2(K)$, de translaties vormen een normale ondergroep $T(K^2)$ daarvan, want $T(K^2)$ hangt niet af van de keuze van coördinaten (ga na).
Ook rechtstreeks: voor een collineatie ρ van $PR \setminus L_\infty$ is $\rho T_c \rho^{-1}$ een transvectie met as $\rho L_\infty = L_\infty$; voor een affiniteit $\pi = T_a B$ is $\pi T_c \pi^{-1} = (T_a B) T_c (B^{-1} T_{-a}) : x \to B(B^{-1}(x-a)+c)+a = x+Bc$, dus $\pi T_c \pi^{-1} = T_{Bc}$.
Bedenk dat $T_a T_b = T_{a+b}$, $T_a^{-1} = T_{-a}$.

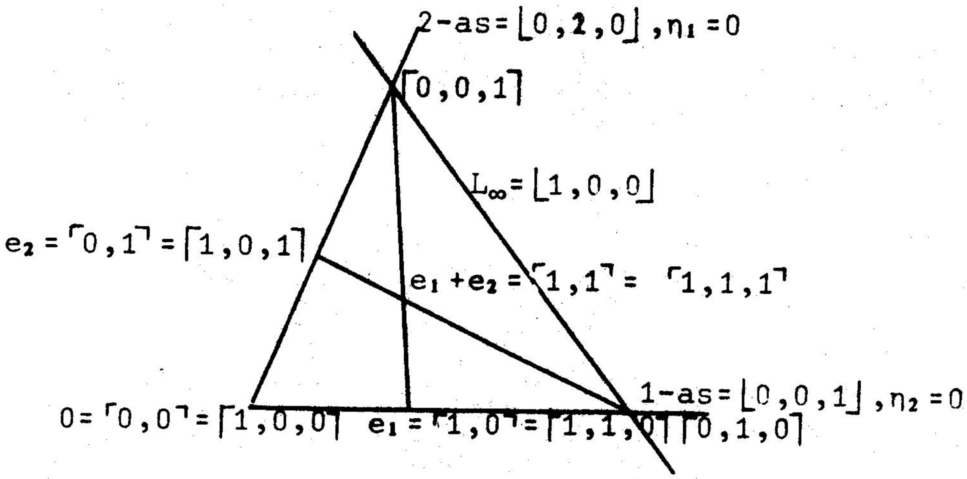
De lineaire transformaties vormen de ondergroep $GL_2(K)$; dit is de isotropiegroep van $O = \ulcorner 0,0 \urcorner = |1,0,0|$ in $GA_2(K)$, d.w.z. bestaat uit de affiniteiten die O vast laten. Een ander punt $a = \ulcorner\alpha_1, \alpha_2\urcorner = |1, \alpha_1, \alpha_2|$ heeft een geconjugeerde isotropiegroep $\pi GL_2(K)\pi^{-1}$, waar $\pi \in GA(K)$, $\pi O = a$, bv. $\pi = T_a$. De affiene groep is het niet-directe product

(14.3) $GA_2(K) = T(K^2) GL_2(K) = GL_2(K) T(K^2)$.

Een collineatie van een affien vlak op zichzelf heet ook wel semiaffiene transformatie. Na keuze van een oorsprong O is deze op precies één manier te schrijven als product $\rho = T_a B$ van een translatie en σ-$\frac{1}{2}$ lineaire transformatiesB van K^2. De halfaffiniteiten vormen weer een groep $\Gamma A_2(K)$, die niet direct product is van de translatiegroep $T(K^2)$ met de isotropiegroep $\Gamma L_2(K) = \Gamma L(K^2)$ (zie Ha 5).

(14.4) $\Gamma A_2(K) = T(K^2) \Gamma L_2(K) == \Gamma L_2(K) T(K^2)$.

Deze bevat de affiene groep $GA_2(K)$ als kern van het homomorfisme van $\Gamma A_2(K) \to Aut(K)$, dat aan $\rho = T_a B$ het bij B behorende automorfisme σ toevoegt (ga na; vergelijk (9.6)).



Figuur 34.

De keuze van coördinaten in het affiene vlak wordt bepaald door de keuze van de vier basispunten in $\mathcal{P}$R:
$\lceil 1,0,0 \rceil$, $\lceil 0,1,0 \rceil$ | L_∞, $\lceil 0,0,1 \rceil$ | L_∞, $\lceil 1,1,1 \rceil$.
Derhalve ook door de keuze van de affiene punten $\ulcorner 0,0 \urcorner$, $\ulcorner 1,1 \urcorner$ en de rechten $\eta_2 = 0$ (de η_1-as) en $\eta_1=0$ (de η_2-as); equivalent hiermee is de keuze van de drie punten $\ulcorner 0,0 \urcorner$, $\ulcorner 1,0 \urcorner$ en $\ulcorner 0,1 \urcorner$ in het affiene vlak.

Een affien vlak kan worden opgevat als een 2-dimensionale K-vectorruimte, waarin de oorsprong 0 is "vergeten"; deze mag willekeurig gekozen worden.

Een <u>affiene coördinaat</u> op een affiene rechte L is een projectieve coördinaat op L die ∞ is voor $L \cap L_\infty$; deze voegt aan ieder affien punt p L een getal $\xi \in K$ toe en maakt zo L tot "getallenrechte".

Gegeven twee punten a en b in het affiene vlak; laat een affiene coördinaat op $a \oplus b$ voor a,b resp. α,β zijn.

Het punt x op $a \oplus b$ met H (a,x, b,∞) heeft dan de coördinaat $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ (ga na).

Dit leidt ons tot

(14.5) <u>Definitie. Zijn</u> a <u>en</u> b <u>punten in het affiene vlak, dan is het midden van</u> a <u>en</u> b <u>het punt</u> x <u>zodat</u>

$$H\ (a,x,\ b,\ (a + b)\cap L_\infty)$$

Uiteraard is het begrip "midden" invariant onder (semi) affiene transformaties, wegens (4.5). Merk op dat wij voor de definitie van "midden" geen metriek nodig hebben !

Een affiene kegelsnede of kegelsnede in het affiene vlak is de doorsnede van een kegelsnede in het projectieve vlak met het affiene vlak, te beschrijven als snijfiguur van een kegel in R met top 0 en een vlak $e_0 + L_\infty$, niet door 0, van R. Dit rechtvaardigt de naam kegelsnede. Zij C een kegelsnede in het projectieve vlak. Is C bepaald door zo'n doorsnede met het affiene vlak? Als het grondlichaam K oneindig veel elementen bevat, liggen er op C oneindig veel punten; aangezien $C \cap L_\infty$ hoogstens twee punten bevat, liggen er meer dan vijf affiene punten op C, die C dus volledig bepalen. Als K eindig veel elementen bevat, dan is de orde van K: $|K| = p^n$, p = karakteristiek van K. (zie bv. Birkhoff-Maclane, A survey of modern Algebra, Ch. XV Thm. 15). p=2 hebben wij uitgesloten. Het aantal punten op C is gelijk aan het aantal punten op een rechte, d.i. $p^n + 1$, dus het aantal affiene punten op C is minstens $p^n - 1$. Er liggen dus zeker minstens vijf affiene punten op C, tenzij $|K| = 3$ of 5.
$|K| = 5$: dan zijn er 4,5 of 6 affiene punten op C; zijn het er 4, dan hebben wij de raaklijn in één van die punten nodig om C vast te leggen.
$|K| = 3$: dan zijn er 2,3 of 4 affiene punten op C. Zijn het er 4, dan is C daardoor bepaald. Is n.l. x een affien punt op C, dan gaan er door x vier rechten, waarvan er drie C in een tweede affien punt snijden; de vierde moet dus de raaklijn zijn. Liggen er 3 affiene punten op C, dan dient men b.v. de raaklijn in 2 daarvan te geven. Heeft C maar 2 affiene punten, dan heeft men de raaklijnen in die punten nodig en de richting van één van de punten op L_∞ van C.
Samenvattend zien wij dus: is $|K| > 5$, dan is C door zijn affiene punten bepaald; is $|K| = 3$ of 5, dan moet men soms behalve de affiene punten meer gegevens over C verschaffen om C vast te leggen; wij zullen steeds veronderstellen dat dit gebeurd is. Met deze afspraak hebben wij dus bereikt: een affiene kegelsnede bepaalt de bijbehorende projectieve kegelsnede. In veel gevallen gaan wij van een affiene kegelsnede stilzwijgend op de projectieve kegelsnede over door toevoeging van de eventuele punten op L_∞.

Hoe ziet de vergelijking van een kegelsnede er uit in affiene coördinaten ? Projectief hebben wij

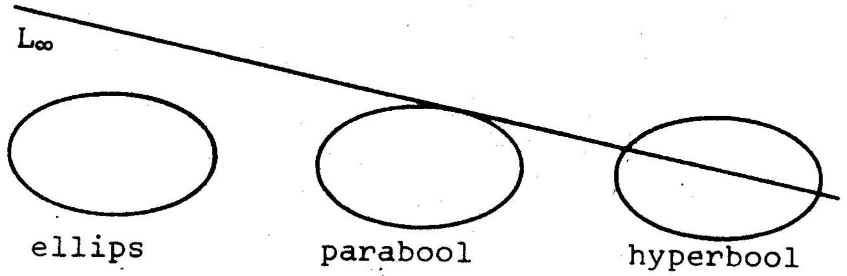
$$\alpha_{00}\xi_0^2 + \alpha_{11}\xi_1^2 + \alpha_{22}\xi_2^2 + 2\alpha_{01}\xi_0\xi_1 + 2\alpha_{02}\xi_0\xi_2 + 2\alpha_{12}\xi_1\xi_2 = 0.$$

De affiene vergelijking krijgen wij door $\xi_0 = 1$ te stellen:

$$\alpha_{11}\xi_1^2 + \alpha_{22}\xi_2^2 + 2\alpha_{12}\xi_1\xi_2 + 2\alpha_{01}\xi_1 + 2\alpha_{02}\xi_2 + \alpha_{00} = 0.$$

Omgekeerd leidt men uit de affiene vergelijking de projectieve af door "homogeen maken" : men stopt een factor ξ_0 in de lineaire termen, ξ_0^2 in de constante term. De affiene kegelsneden zijn de kwadrieken van K^2.
Een niet ontaarde affiene kegelsnede heeft 0,1 of 2 punten met L_∞ gemeen; naargelang dit aantal benoemen wij de affiene kegelsneden.

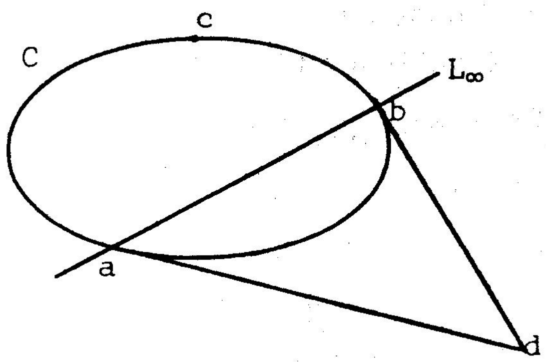
(14.6) Definitie. Een niet ontaarde affiene kegelsnede C heet ellips als C met L_∞ geen punt gemeen heeft, parabool als C met L_∞ één punt gemeen heeft, hyperbool als C met L_∞ twee punten gemeen heeft.



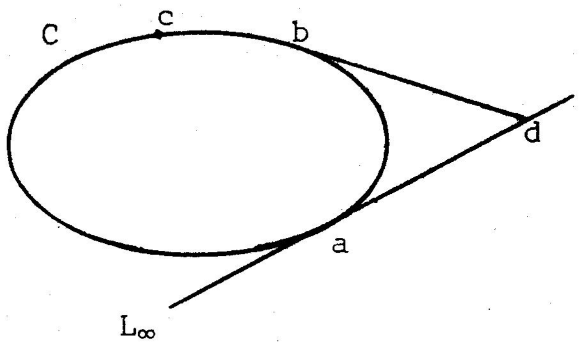
Figuur 35.

Bij (semi) affiene transformaties gaan ellipsen, parabolen en hyperbolen uiteraard in kegelsneden van dezelfde soort over. Analoog aan (11.10) geldt

(14.7) Laat C en C' beide een parabool resp. hyperbool zijn. Dan is er een affiene transformatie die C in C' overvoert.
Bewijs. Beschouw eerst het geval dat C en C' hyperbolen zijn. Noem de snijpunten van C met L_∞: a en b. Neem c op C, ≠ a, ≠ b, d = snijpunt van de raaklijnen aan C in a en b. Analoog a', b', c' en d' bij C'. Een projectiviteit die a → a', b ↦ b', c ↦ c', d → d', voert L_∞ in zichzelf over en beeldt C op C' af.



Figuur 36a



Figuur 36b

Zijn C en C' parabolen, neem dan a = raakpunt van C aan L_∞, analoog a'. De rest van het bewijs gaat dan als boven.

De bovenstaande stelling is niet geldig voor ellipsen. I.h.a. spelen in dat geval de eigenschappen van het coördinatenlichaam een rol. Wij lichten dit aan een voorbeeld toe. Beschouw het projectieve vlak over het lichaam van de rationale getallen $\mathbb{Q}$. Kies basispunten en neem voor L_∞ de rechte $\lfloor 1,0,0 \rfloor$. De vergelijkingen

$\xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 = 0$, affien $\xi_1^2 + \xi_2^2 = 1$ (cirkel om 0 met straal 1),

$\xi_0^2 - \xi_1^2 + 2\xi_2^2 = 0$, affien $\xi_1^2 - 2\xi_2^2 = 1$ (hyperbool in $\mathbb{R}^2$),

stellen beide een ellips voor in $P\mathbb{Q}^3 \setminus \lfloor 1,0,0 \rfloor$.
Immers $\xi_0 = 0$ impliceert in beide gevallen: $\xi_1 = \xi_2 = 0$ ($\sqrt{2}$ is niet rationaal !). Stel er is een affiene transformatie π die de eerste kegelsnede afbeeldt op de tweede. Breiden wij $\mathbb{Q}$ uit tot de reële getallen , dan stelt de eerste vergelijking een ellips voor, de tweede een hyperbool. π laat zich op precies één manier voortzetten tot een affiene transformatie van het reële vlak; maar die zou een ellips op een hyperbool afbeelden !
De hyperbolen en parabolen vormen elk één klasse onder de werking van de affiene groep. De ellipsen kunnen meer klassen vormen, of helemaal niet voorkomen, zoals in het complexe projectieve vlak.

(14.8) Definitie. Zij C een ellips of een hyperbool. De pool van L_∞ t.o.v. C heet het middelpunt van C.

(14.9) Zij C een ellips of hyperbool, m het middelpunt van C. Is $a \in C$, dan heeft $a \oplus m$ nog een punt $b \neq a$ met C gemeen; m is het midden van a en b.

Bewijs. $a \not\in L_\infty$, dus $a + m$ is geen raaklijn aan C, dus snijdt C in een punt $b \neq a$. Snijdt $a \oplus m$ de lijn L_∞ in d, dan $H(a,m;b,d)$. Dus m is het midden van a en b.

(14.10) Definitie. Zij H een hyperbool. De raaklijnen in de punten van H op L_∞ heten de asymptoten van H.

(14.11) De asymptoten van een hyperbool gaan door het middelpunt.

(14.12) Zij C een ellips of hyperbool. Een lijn door het middelpunt van C heet een middellijn. Is L een middellijn, dan heet de poollijn L' van $L \cap L_\infty$ de toegevoegde middellijn.

(14.13) De afbeelding die een middellijn op zijn toegevoegde middellijn afbeeldt is een projectieve involutie in de waaier door m. Bij een hyperbool zijn de asymptoten de vaste lijnen van deze involutie.

(14.14) Zij L een middellijn die C snijdt in a en b. De raaklijnen in a en b aan C zijn evenwijdig met de toegevoegde middellijn van L.

Opgaven

Bij de volgende constructie-opgaven is, naast het snijden van lijnen en het verbinden van punten, het trekken van een lijn door een gegeven punt, evenwijdig aan een gegeven lijn, toegestaan.

14.1. Van een hyperbool H zijn gegeven de twee asymptoten en een punt. Verder is gegeven een lijn L door dat punt. Construeer het tweede snijpunt van L met H.

14.2. Van een hyperbool zijn vijf punten gegeven. Construeer de asymptoten, als verder een kegelsnede C_0 gegeven is, waarvan de snijpunten met elke rechte bepaald kunnen worden.

14.3. Van een hyperbool zijn gegeven drie punten en de richtingen van de asymptoten. Construeer het middelpunt.

14.4. Bewijs dat er in het affiene vlak over de complexe getallen alleen parabolen en hyperbolen bestaan.

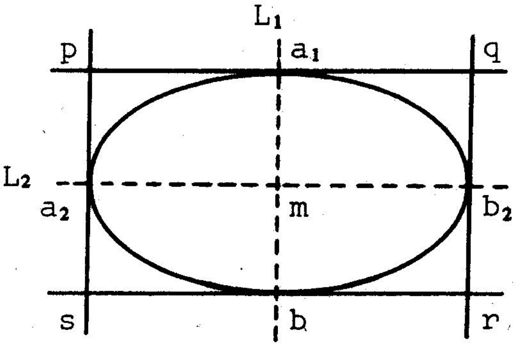
14.5. Gegeven in het affiene vlak drie punten a, b_1, b_2, niet op één rechte. Zij c_i het midden van a en b_i. Bewijs dat $c_1 + c_2 // b_1 + b_2$.

14.6. Gegeven twee toegevoegde middellijnen L_1 en L_2 van een ellips E. L_i snijdt E in a_i en b_i. Trek de raaklijnen in a_i en b_i. Laat die de snijpunten p, q, r, s hebben, als in de figuur aangegeven. Bewijs:

A) $a_1 + a_2 // q + s // b_1 + b_2$

$a_1 + b_2 // p + r // a_2 + b_1$

B) p + r en q + s zijn toegevoegde middellijnen.



14.7. Van een hyperbool zijn gegeven de asymptoten en een middellijn. Construeer de toegevoegde middellijn.

14.8. Zij C een ellips of hyperbool, L en L' een paar toegevoegde middellijnen van C. Laat zien dat C scheefsymetrisch is t.o.v. L in de richting van L', d.w.z., is ℓ een lijn die C snijdt in een punt a $\notin$ L', ℓ // L, dan snijdt ℓ de kegelsnede C in een tweede punt b en $\ell \cap L'$ is het midden van a en b.

§ 15 Het reële vlak. Complexificatie.

(15.1) Definitie. Een involutie op een rechte (kegelsnede, in een waaier) heet elliptisch resp. hyperbolisch, als hij geen resp. twee vaste punten (rechten) heeft.

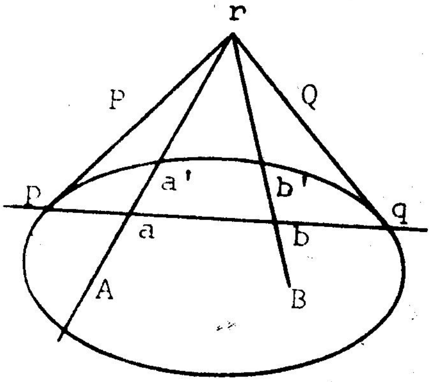
De poolinvolutie (11.7) van een ellips resp. hyperbool op de oneigenlijke rechte is elliptisch resp. hyperbolisch. Een hyperbolische involutie π is bepaald door zijn vaste punten p en q (9.10)

(15.2) Definitie. Zij C een kegelsnede in een willekeurig projectief vlak. Een punt $p \notin C$ heet buitenpunt van C als er door p twee raaklijnen aan C zijn, binnenpunt als dit niet zo is.

Klaarblijkelijk is de eigenschap buiten- of binnenpunt te zijn invariant onder collineaties. Of er binnenpunten bestaan, hangt van het grondlichaam af. In het complexe projectieve vlak $P\mathbb{C}^3$ is ieder punt $p \notin C$ buitenpunt van C. (ga na) Het middelpunt van een ellips in een affien vlak is binnenpunt, dat van een hyperbool buitenpunt.

(15.3) Zij π een involutie op een kegelsnede met centrum p. π is elliptisch als p binnen C ligt, hyperbolisch als p buiten C ligt.
Bewijs. De eventuele dubbelpunten van π zijn de snijpunten met C van de poollijn van p, dus de raakpunten van de raaklijnen uit p; zie (13.3).

(15.4) Zij p een buitenpunt van de kegelsnede C, met raaklijnen P,Q; en A een rechte door r die C snijdt in twee punten. Dan geldt: een rechte B van de waaier r incideert met een punt van C dan en slechts dan als DV(P,A,Q,B) een kwadraat is van K.



Figuur 37.

Bewijs: Laten p,q de raakpunten van P,Q zijn, $a = A\cap(p+q)$, $b = B\cap(p+q)$, en a' een snijpunt van A met C.
Als B een punt b' met C gemeen heeft is volgens (13.5)
$DV_C(p,a',q,b')^2 = DV(p,a,q,b) = DV(P,A,Q,B)$.
Omgekeerd: als $DV(P,A,Q,B) = \lambda^2$ is er één punt $b' \in C$ waarvoor $DV_C(p,a',q,b') = \lambda$, en dan is $r+b' \cap (p+q) = b$.

Of er door een buitenpunt rechten zijn die de kegelsnede niet treffen hangt van het coördinatenlichaam K af. Wij beperken ons nu verder tot het reële en het complexe projectieve vlak.

Een $\mathbb{R}$-vectorruimte R kunnen we uitbreiden tot een $\mathbb{C}$-vectorruimte $R \oplus iR$; dit komt neer op het toelaten van complexe coördinaten t.o.v. een basis van R, we beschouwen $\mathbb{R}^3$ als deel van $\mathbb{C}^3$. De complexe uitbreiding van een $\mathbb{R}$-vectorruimte onderscheidt zich van een willekeurige $\mathbb{C}$-vectorruimte door de aanwezigheid van de complexe conjugatie: $z = x+iy \mapsto \bar{z} = x-iy$, waarbij $x = \mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z+\bar{z}) \in R$, $y = \mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2i}(z-\bar{z}) \in R$; in coördinaten: $z = \ulcorner \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \urcorner \in \mathbb{C}^3$ heeft $\bar{z} = \ulcorner \bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2, \bar{\zeta}_3 \urcorner$. Daarbij is $x \in R \Leftrightarrow x = \bar{x}$; deze vectoren heten "reëel".
Is $z \subset R \oplus iR$ een $\mathbb{C}$-lineaire deelruimte, dan $\bar{z} = \{\bar{z} | z \in Z\}$ ook.
Als $Z = \bar{Z}$ noemen we ook Z "reëel"; dit is het geval als Z een basis van reële vectoren bezit. Let wel dat zo'n "reële" $\mathbb{C}$-lineaire deelruimte niet-reële vectoren bevat.
Is $X \subset R$ een $\mathbb{R}$-lineaire deelruimte, dan vatten we de complexe uitbreiding $X \oplus iX$ op als $\mathbb{C}$-lineaire deelruimte van $R \oplus iR$; deze is "reëel", en omgekeerd: $Z = \bar{Z} \Leftrightarrow Z = Z \oplus iX$.
Een $\mathbb{R}$-lineaire afbeelding $A : R \to S$ van $\mathbb{R}$-vectorruimten zetten we voort tot een $\mathbb{C}$-lineaire afbeelding $A : R \oplus iR \to S \oplus iS$ door $A(x+iy) = Ax+iAy$; de matrix op een reële basis blijft dezelfde.
Een willekeurige $\mathbb{C}$-lineaire afbeelding $B : R \oplus iR \to S \oplus iS$ heeft een complex geconjugeerde $\bar{B}$, gedefinieerd door $\overline{BZ} = \bar{B}\bar{Z}$; is (β_{ij}) de matrix van B op een reële basis, dan $(\bar{\beta}_{ij})$ van $\bar{B}$. Als $B = \bar{B}$ heet B "reëel"; dit is het geval als $BR \subset S$, dus B de voortzetting is van een $A : R \to S$. Een "reële" B voert "reële" deelruimten Z over in "reële" deelruimten; dit geldt ook al als $B = \gamma C$ met $C = \bar{C}$, $\gamma \in \mathbb{C}$.

Het reële projectieve vlak $\mathcal{P}\mathbb{R}^3$ beschouwen we als deelvlak van het complexe projectieve vlak $\mathcal{P}\mathbb{C}^3$, de <u>complexificatie</u> van het reële vlak. Een punt of rechte $X \in \mathcal{P}\mathbb{R}^3$ identificeren we met het "reële" punt of rechte $X \oplus iX \in \mathcal{P}\mathbb{C}^3$, die als lineaire deelruimte de complexe uitbreiding van X is.
Let wel dat zo'n reële rechte ook niet-reële punten bevat, en dat door zo'n reëel punt ook niet-reële rechten gaan. De complexe conjugatie $p \mapsto \bar{p}$, $L \mapsto \bar{L}$ is een collineatie van $\mathcal{P}\mathbb{C}^3$, geen projectiviteit.

Een projectiviteit $\lceil A \rceil$ van $\mathbb{P}\mathbb{R}^3$ zetten we voort tot de projectiviteit $\lceil A \rceil$ van $\mathbb{P}\mathbb{C}^3$. Een willekeurige projectiviteit π van $\mathbb{P}\mathbb{C}^3$ heeft een complex geconjugeerde $\bar{\pi}$, waarvoor $\bar{\pi}\,\bar{p} = \overline{\pi p}$, $\bar{\pi}\,\bar{L} = \overline{\pi L}$; voor $\pi = \lceil B \rceil$ is $\bar{\pi} = \lceil \bar{B} \rceil$.
Als $\pi = \bar{\pi}$ heet π "reëel"; dit betekent dat π reële punten rechten overvoert in reële punten en rechten, dus voortzetting is van een projectiviteit $\lceil A \rceil$ van $\mathbb{P}\mathbb{R}^3$. Bij een reële projectiviteit $\pi = \bar{\pi}$ is er een reële lineaire transformatie $A = \bar{A}$ waarvoor $\pi = \lceil A \rceil$; als ook $\pi = \lceil B \rceil$ is volgens (7.3) of (9.2) $B = \lambda A$ met $\lambda \in \mathbb{C}$, dus mogelijk $B \neq \bar{B}$! Een reële projectiviteit kan ook door niet-reële lineaire transformaties geïnduceerd worden, die op een reële basis een niet-reële matrix hebben.
Hebben de punten x,y van een reële rechte projectieve coördinaat ξ resp. η t.o.v. drie reële basispunten, dan is $\bar{x} = \bar{y} \Leftrightarrow \bar{\xi} = \bar{\eta}$ en x reëel $\Leftrightarrow$ ξ reëel. De collineatie $x \mapsto \bar{x}$ is niet projectief: voor vier punten p,a,q,b op een rechte is $DV(\bar{p},\bar{a},\bar{q},\bar{b}) = \overline{DV(p,a,q,b)}$.
Op overeenkomstige wijze kunnen we een kegelsnede C van $\mathbb{P}\mathbb{R}^3$ complex uitbreiden, met op een reële basis dezelfde vergelijking, door de bijbehorende polariteit δ complex voort te zetten. Deze "reële" kegelsneden van $\mathbb{P}\mathbb{C}^3$ zijn gekenmerkt door $C = \bar{C}$, of $\delta = \bar{\delta}$.

Een elliptische involutie heeft, complex voortgezet, een paar complex geconjugeerde vaste punten. Uit een binnenpunt van een reële kegelsnede zijn er, na complexificatie, twee complex geconjugeerde raaklijnen. We bekijken nu de situatie in (15.4) voor een binnenpunt.

(15.5) <u>Zij</u> r <u>een binnenpunt van de kegelsnede</u> C <u>in het reële projectieve vlak. Iedere (reële) rechte door</u> r <u>snijdt</u> C <u>in twee (reële) punten</u>.

Bewijs: Laten P en $Q = \bar{P}$ weer de raaklijnen zijn, met raakpunten p en $q = \bar{p}$; de poollijn $p \oplus q$ van r is reëel. Kies een reële rechte A door r die C snijdt in een reëel punt a'; ook $a'' = A \cap (p\oplus q)$ is reëel. Een willekeurige reële rechte B door r heeft met C tenminste één complex punt b' gemeen; $b = B \cap (p\oplus q)$ is reëel. Nu is analoog (8.7)

$$\overline{DV(p,a,q,b)} = DV(q,a,p,b) = DV(p,a,q,b)^{-1} \text{ (ga na)},$$

dus $|DV(p,a,q,b)| = 1$. Uit (13.5) blijkt ook $|DV_C(p,a',q,b')| = 1$,

dus $\overline{DV_C(p,a',q,b')} = DV_C(p,a',q,b')^{-1}$. Nu is

$$DV_C(p,a',q,\overline{b'}) = \overline{DV_C(q,a',p,b')} = DV_C(p,a',q,b'),$$

dus $b' = \overline{b'}$, B snijdt C reëel.

(15.6) Zijn π_1 en π_2 verschillende involuties op dezelfde rechte (kegelsnede, in dezelfde waaier) in het reële projectieve vlak, en is π_1 elliptisch, dan hebben π_1 en π_2 precies één gemeenschappelijk paar toegevoegde punten.

Bewijs. Door beide involuties op een kegelsnede C over te brengen krijgen wij involuties op een kegelsnede. Het centrum p_1 van π_1 ligt binnen C. Is p_2 het centrum van π_2, dan snijdt $p_1 \oplus p_2$ de kegelsnede C in twee punten a en b. a en b zijn aan elkaar toegevoegd onder beide involuties.

Nu vullen we (14.7) aan:

(15.7) Laten C en C' ellipsen zijn in het reële affiene vlak. Dan is er een reële affiene transformatie die C in C' overvoert.

Bewijs: Notaties als bij (14.7), waarbij nu $\overline{a} = b$, $\overline{a'} = b'$; we kiezen c,c' reëel en d,d' zijn reëel als snijpunten van de complex geconjugeerde raaklijnen in a,b resp. a',b'. Er is een complexe projectiviteit π waarvoor $\pi a = a'$, $\pi b = b'$, $\pi c = c'$, $\pi d = d'$, dus $\pi C = C'$ (zie bewijs (14.7)). We willen aantonen dat deze π reëel is: $\overline{\pi}a = \overline{\pi}\,\overline{b} = \overline{\pi b} = \overline{b'} = a'$, net zo $\overline{\pi}b = b'$, en $\overline{\pi}c = \overline{\pi}\,\overline{c} = \overline{c'} = c'$, net zo $\overline{\pi}d = d'$; dus $\pi = \overline{\pi}$ (8.2).

De kegelsneden in het reële affiene vlak vormen 3 klassen onder de werking van de affiene groep: ellipsen, hyperbolen, parabolen.

Opgaven.

15.1. Veronderstel in (15.4) $B \neq P,Q$. Als B met C een punt b' gemeen heeft, wat is dan $DV_C(p,a',q,b'')$ voor het tweede snijpunt b". Hoe gebeurt met de DV_C als we a' vervangen door het andere snijpunt a" van A met C?

15.2. Laat zien dat in $\mathbb{PQ}^3$ het punt $0 = \lceil 1,0,0 \rceil$ binnen de kegelsnede C met vergelijking $\xi_0^2 - \xi_1^2 + 2\xi_2^2 = 0$ ligt. Geef een rechte door 0 aan die C niet treft.

In de volgende opgaven beschouwen we het reële projectieve vlak.

15.3. Laten r,C,P,Q gegeven zijn als in (15.4), A en B beide willekeurige rechten door r. Bewijs: als DV(P,A,Q,B) $<$ 0 snijdt van de rechten A en B één C wel, de andere niet.

15.4. Laten p,q punten van een kegelsnede C zijn, a,b punten van p+q. Bewijs: als DV(p,a,q,b) $<$ 0 ligt van de punten a,b één binnen C, de ander buiten.

Van nu af wordt het reële vlak complex uitgebreid.

15.5. Ga na dat voor complexe punten p,q en complexe rechten L,M geldt

i) p,q reëel $\Rightarrow$ p+q reëel;
   L,M reëel $\Rightarrow$ $L \cap M$ reëel.

ii) $p \neq \bar{p}$, dan $p+\bar{p}$ reëel, door p gaat precies één reële rechte;
   $L \neq \bar{L}$, dan $L \cap \bar{L}$ reëel, op L ligt precies één reëel punt.

15.6. Zij π een complexe involutie op een "reële" rechte, met de eigenschap: er is een punt a waarvoor $\pi a = \bar{a}$. Bewijs dat hyperbolisch is. Laat zien dat omgekeerd iedere hyperbolische involutie π zo'n punt a bezit.

15.7. Zij π een reële projectiviteit van een reële rechte (of waaier, of kegelsnede), waarop een projectieve coördinaat gegeven is, die voor reële punten reële waarden heeft. Bewijs:

(i) Als π de punten met coördinaten i, -i vast laat, heeft π de gedaante: $\xi \mapsto \frac{\alpha\xi-\beta}{\beta\xi+\alpha}$; alle projectiviteiten met deze eigenschap vormen een commutatieve groep.

(ii) Als π de punten met coördinaten i,-i verwisselt heeft π de gedaante $\xi \mapsto \frac{\alpha\xi+\beta}{\beta\xi-\alpha}$.

§16 Het aequiforme vlak. Cirkels.

In het reële projectieve vlak $\mathbb{P}\mathbb{R}^3$ kiezen we weer $L_\infty = |1,0,0|$. Het affiene vlak $\mathbb{P}\mathbb{R}^3 \setminus |1,0,0|$ beschouwen we nu als $\mathbb{R}^2$ met inproduct. Een affiene rechte $\lfloor \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \rfloor$, α_1 en α_2 niet beide $= 0$, heeft in affiene coördinaten de vergelijking

$$\alpha_0 + \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 = 0.$$

Loodrechte stand van $L = \lfloor \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \rfloor$ en $M = \lfloor \beta_0, \beta_1, \beta_2 \rfloor$, t.o.v. het inproduct in de affiene coördinaten gegeven door

$$((\xi_1,\xi_2), (\eta_1,\eta_2)) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2$$

betekent orthogonaliteit van hun normalen

$$(\ulcorner \alpha_1, \alpha_2 \urcorner | \ulcorner \beta_1, \beta_2 \urcorner) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = 0.$$

Het oneigenlijke punt van $\lfloor \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \rfloor$ is $\lceil 0, \alpha_2, -\alpha_1 \rceil = \lceil 0,1,\xi \rceil$, van $\lfloor \beta_0, \beta_1, \beta_2 \rfloor$ is $\lceil 0, \beta_2, -\beta_1 \rceil = \lceil 0,1,\eta \rceil$, met $\xi = -\alpha_2^{-1}\alpha_1$, $\eta = -\beta_2^{-1}\beta_1$, dan geldt in deze projectieve coördinaat $\xi\eta + 1 = 0$,

$$L \perp M \Leftrightarrow \eta = -\xi^{-1}$$

De afbeelding $\xi \mapsto -\xi^{-1}$ is een involutie op L_∞ met vaste punten $\xi = \pm i$, dus $\lceil 0,1,i \rceil$ en $\lceil 0,1,-i \rceil$. De involutie is, reëel gezien, elliptisch. Dit leidt tot de volgende definitie.

(16.1) **Definitie.** Op L_∞ van een reëel affien vlak kiezen wij een vaste elliptische involutie π_0, genaamd de rechte-hoeken involutie. Twee rechten in het affiene vlak waarvan de oneigenlijke punten toegevoegd zijn in de rechte-hoeken involutie, heten loodrecht. π_0 induceert in iedere waaier in het affiene vlak een rechte-hoeken involutie. Het affiene vlak tesamen met de involutie π_0 noemen wij het aequiforme vlak.

De vaste punten i_1, i_2 van π_0 in de complexe uitbreiding heten de isotrope punten; deze leggen zowel $L = i_1 \oplus i_2$ als π_0, en daarmee het aequiforme vlak vast.

Laat het vlak gegeven zijn als $\mathbb{P}R \setminus L_\infty$, waarin R een 3-dimensionale $\mathbb{R}$-vectorruimte is. Laten p_0, p_∞ een paar loodrechte (reële) punten op L_∞ zijn: $\pi_0 p_0 = p_\infty$, $\pi_0 p_\infty = p_0$. Kies een (reële) basis e_1, e_2 van L_∞ waarvoor $p_0 = |e_1|$, $p_\infty = |e_2|$, dan is $i_1 = |e_1 + \lambda e_2|$, $i_2 = |e_1 + \bar{\lambda} e_2|$.

In de projectieve coördinaat ξ van $|e_1+\xi e_2|$ op L_∞ wordt $\pi_0 : \xi \to \alpha\xi^{-1}$. Nu is $\alpha = \lambda^2 < 0$ omdat $\lambda \neq \bar{\lambda}$, dus $\lambda = i\rho$, $\rho \in \mathbb{R}$.
Neem ρe_2 als basisvector in plaats van e_2, dan wordt $\lambda = i$. Dus:
R bezit een reële basis e_0, e_1, e_2 zodat

$$i_1 = |0,1,i|,\quad i_2 = |0,1,-i|$$

de projectieve coördinaat $\xi = \xi_1^{-1}\xi_2$ op $L_\infty = |1,0,0|$ heeft in i_1, i_2 de waarde i resp. -i, en

$$\pi_0 : \xi \to -\xi^{-1}.$$

In het vervolg zullen we het aequiforme vlak steeds zo gecoördinaliseerd veronderstellen.

Cirkels willen wij nu zo gaan definiëren dat zij beschreven worden door een vergelijking van het type

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + 2\alpha_{01}\xi_1 + 2\alpha_{02}\xi_2 + \alpha_{00} = 0.$$

Het is duidelijk dat dit precies de kegelsneden zijn die, na complexificatie, door de punten $i_1 = \lceil 0,1,i \rceil$ en $i_2 = \lceil 0,1,-i \rceil$ gaan, dus die op L_∞ als poolinvolutie π_0 induceren. Dit leidt ons tot de volgende definitie.

(16.2) Definitie. Een cirkel is een niet ontaarde reële kegelsnede C die L_∞ niet raakt en die op L_∞ de rechte-hoeken involutie als poolinvolutie induceert. Dit betekent dat C, na complexificatie, door de isotrope punten moet gaan. Andere, equivalente, definitie: Een cirkel is een reële ellips waarvan alle paren toegevoegde middellijnen loodrecht op elkaar staan.

Het heeft zin rechten in het affiene vlak te interpreteren als ontaarde cirkels (samen met L_∞ in het projectieve vlak). Met de definities (16.1) en (16.2) hebben wij loodrechte stand en cirkel op coördinaatvrije wijze ingevoerd.
Stel nu a, b en c zijn drie, niet collineaire, reële affiene punten, C is een kegelsnede door a, b, c, i_1 en i_2.
Is C een cirkel ? Wij moeten alleen nog bewijzen dat C een reële kegelsnede is. Laat C gegeven zijn door de vergelijking

$$\sum_{i,j=0}^{2} \alpha_{ij}\,\xi_i\,\xi_j = 0,$$

waarin (α_{ij}) een niet ontaarde symmetrische matrix is met $\det(\alpha_{ij}) \neq 0$. De complex geconjugeerde kegelsnede $\bar{C}$ wordt gegeven door de vergelijking

$$\sum_{i,j=0}^{2} \overline{\alpha_{ij}}\, \xi_i\, \xi_j = 0.$$

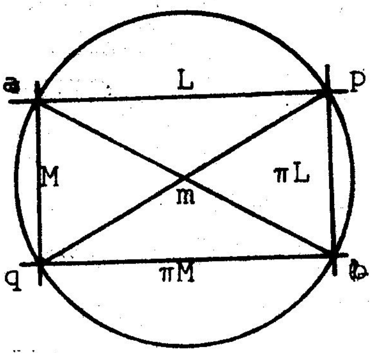
$x = \ulcorner \xi_0, \xi_1, \xi_2 \urcorner$ ligt op C dan en slechts dan als $\bar{x} = \ulcorner \bar{\xi}_0, \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2 \urcorner$ op $\bar{C}$ ligt. Dus $\bar{C}$ heeft met C de vijf punten a, b, c, i_1 en i_2 gemeen en valt er derhalve mee samen. Dat betekent dat er een constante $\rho \in \mathbb{C}$ is zodat

$$\overline{\alpha_{ij}} = \rho\, \alpha_{ij}, \text{ voor } i,j = 0,1,2.$$

Normeren wij de vergelijking van C zó dat één van de α_{ij} reëel en $\neq 0$ is, dan zien wij dat $\rho = 1$, dus dat alle α_{ij} reëel zijn. Daarmee is bewezen:

(16.3) Door drie reële affiene punten gaat precies één cirkel, die ontaard is dan en slechts dan als de punten collineair zijn. Evenzo door twee punten, met gegeven raaklijn in één daarvan, enz.

Neem twee verschillende punten a en b in het affiene vlak. Voeg aan een rechte $L|a$ de rechte door b loodrecht op L toe; deze afbeelding is een projectiviteit. De meetkundige plaats van de snijpunten van L en πL is een cirkel door a en b.



Figuur 38.

Trek door a twee lijnen L en M, $L \perp M$. Dan $\pi M // L$, $\pi L // M$, dus het snijpunt m van $a \oplus b$ en $p \oplus q$, waarin $p = L \cap \pi L$ en $q = M \cap \pi M$, is de pool van L_∞, d.i. het middelpunt. Is omgekeerd C een cirkel door a en b zodat $a \oplus b$ een middellijn is, dan geldt voor iedere $p \in C$: $a \oplus p \perp b \oplus p$. Om dit in te zien, trekken wij de middellijnen $a \oplus b$ en $p \oplus q$, $q \in C$. Dan snijden $a \oplus q$ en $b \oplus p$ elkaar op de poollijn van m, d.i. op L_∞, dus $a \oplus q // b \oplus p$; evenzo

a⊕p//b⊕q. Is L de middellijn // a⊕p, dan is de toegevoegde middellijn L'// b⊕p. Daar L ⊥ L', is a⊕p ⊥ b⊕p. Hiermee hebben we bewezen:

(16.4) Niet ontaarde cirkels zijn de enige kegelsneden C met de volgende eigenschap: voor a en b op C is a⊕b een middellijn dan en slechts dan als a⊕p ⊥ b⊕p voor elke p∈C, waarbij a⊕p = de raaklijn in a als p=a, en analoog p=b.

(16.5) Een cirkel C is bepaald door zijn middelpunt m en een punt x∈C.

Bewijs. Kies y| m⊕x zo dat H(x,m, y, L_∞ ∩ (m⊕x)), dan ook y ∈C. De lijn door x, ⊥ m⊕x, is raaklijn aan C in x. Volgens stelling (15.4) is C door deze gegevens bepaald.

(16.6) Zij π een involutie op L_∞ in het reële aequiforme vlak. Als $\pi \neq \pi_0$, dan is er precies één paar toegevoegde punten onder π, die loodrecht op elkaar staan. Idem voor involuties in waaiers.

Bewijs. π_0 is elliptisch, dus (15.6) geeft het resultaat.

Beschouw in de waaier door het middelpunt van een ellips of hyperbool C de involutie van de toegevoegde middellijnen. Wanneer C geen cirkel is, heeft deze involutie één paar toegevoegde rechten gemeen met de orthogonale involutie.

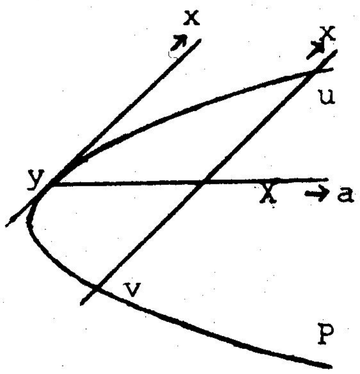
(16.7) Definitie. Zij C een ellips of hyperbool, maar geen cirkel. De toegevoegde middellijnen die loodrecht op elkaar staan, heten de assen van C.

Het middelpunt van een ellips is inwendig, dus alle middellijnen snijden de ellips. Is C een hyperbool en zijn L en L' toegevoegde middellijnen van C, dan liggen L en L' harmonisch t.o.v. de asymptoren P,Q van C. Neem een middellijn A die C snijdt. Voer in de middellijnenwaaier de projectieve coördinaat in die in P,A,Q, resp. 0,1, ∞ is. Volgens (15.4) snijden dan de middellijnen met positieve

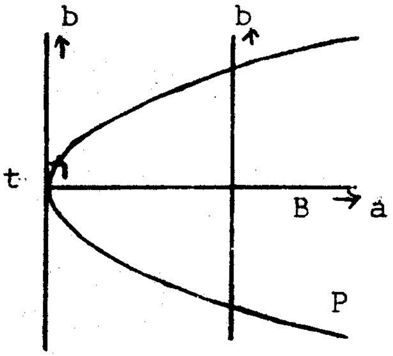
coördinaat. Heeft L coördinaat λ, dan L' -λ (ga na).
Dus L snijdt C en L' niet of omgekeerd. In het bijzonder geldt dit voor de assen.

(16.8) Definitie. De snijpunten van de assen van een ellips (≠cirkel) of hyperbool C met C heten de toppen van C.

(16.9) Een ellips (≠ cirkel) heeft vier toppen, een hyperbool twee.



Figuur 39a.



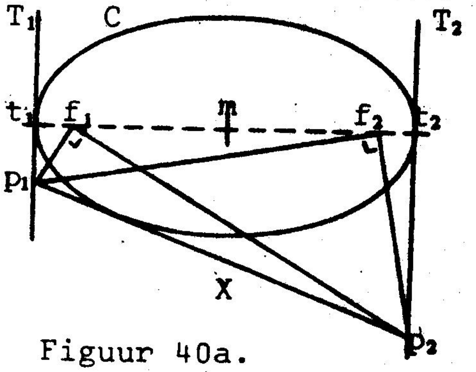
Figuur 39b.

Beschouwen wij nu een parabool P met oneigenlijk punt a. Zij x een willekeurig oneigenlijk punt ≠ a. De poollijn ξ van x wordt een middellijn genoemd. Alle middellijnen zijn evenwijdig : zij gaan door a. X snijdt P in een punt y. De raaklijn in y gaat door x. Trekt men door u ε P en x een lijn, dan snijdt deze de parabool in een tweede punt v. Het midden van u en v ligt op ξ. Neemt men b ⊥ a, dan staat de bijbehorende middellijn B loodrecht op de raaklijn in het snijpunt t met P. t wordt de top van P genoemd, B de as.

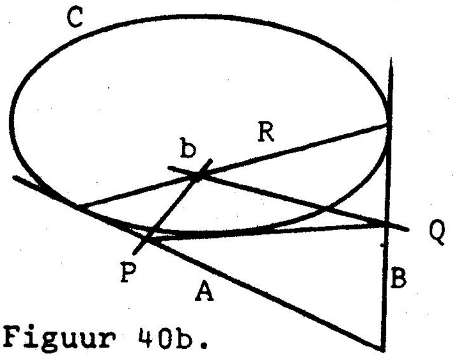
Wij beschouwen nu weer een ellips of hyperbool C. Is a ∉ C, dan hebben wij op de poollijn A van a de poolinvolutie, waarvan de vaste punten de snijpunten met C zijn. Deze involutie brengen wij over op de waaier door a. Wij krijgen de rechte-hoeken involutie als de raaklijnen vanuit a door i_1 en i_2 gaan (ze zijn dus niet reëel).

(16.10) Definitie. Zij C een kegelsnede in het aequiforme vlak. Een brandpunt is een punt waarin toegevoegde richtingen steeds loodrecht op elkaar staan.

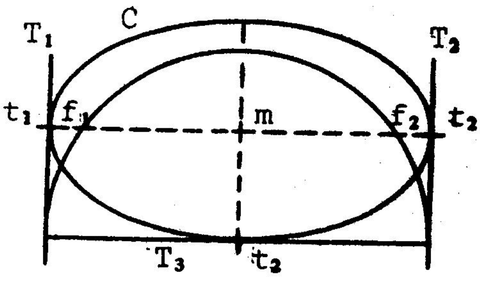
Een cirkel heeft alleen het middelpunt als brandpunt. Is C een ellips of hyperbool, maar geen cirkel, dan vinden wij de reële brandpunten als volgt: neem een raaklijn door i_1 en de toegevoegde complexe raaklijn door i_2 deze twee hebben een reëel snijpunt. Er zijn dus twee brandpunten, f_1 en f_2. De pool van $f_1 \oplus f_2$ ligt op een lijn door f_1, $\perp f_1 \oplus f_2$, en op een lijn door f_2, $\perp f_1 \oplus f_2$, dus is $f_1 \oplus f_2$ een as van C.



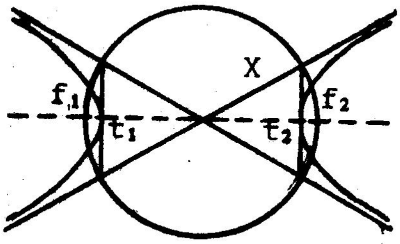
Figuur 40a.



Figuur 40b.



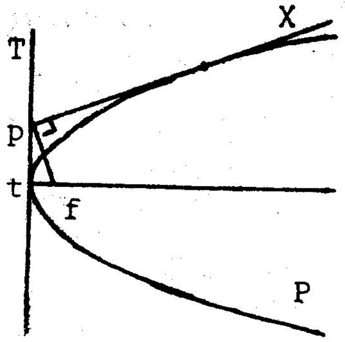
Figuur 40c.



Figuur 40d.

Keren wij nu terug tot een ellips of hyperbool C die geen cirkel is. f_1 is een binnenpunt, dus de as $f_1 \oplus f_2$ snijdt C in twee toppen t_1 en t_2. Trek de raaklijnen in t_1 en t_2: T_1 en T_2. Zij X een willekeurige raaklijn aan C, die T_1 snijdt in p_1, T_2 in p_2. Volgens de duale van (11.7)(fig.40b) zijn $f_i \oplus p_1$ en $f_i \oplus p_2$ toegevoegd, dus staan loodrecht op elkaar. f_i ligt dus op een cirkel met middellijn $p_1 \oplus p_2$. Is C een ellips, dan nemen wij voor X de raaklijn T_3 in één van de toppen $t_3 \neq t_1, t_2$. Dan vinden wij f_1 en f_2 door de volgende constructie : trek een cirkel met als middellijn het stuk van T_3 tussen T_1 en T_2. Deze cirkel snijdt $t_1 \oplus t_2$ in f_1 en f_2.

Is C een hyperbool, dan nemen wij voor ℓ een asymptoot. De constructie wordt dan als in figuur 40d.

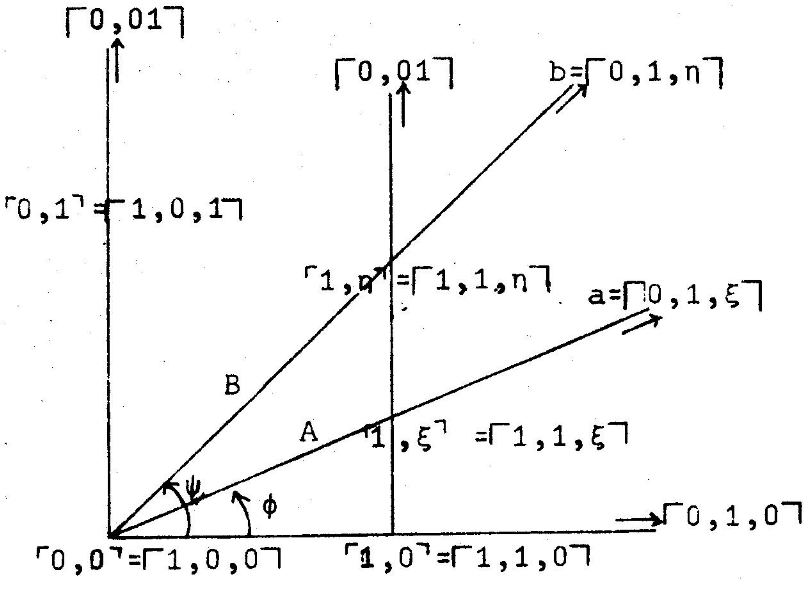


Figuur 41.

Bij een parabool liggen de zaken als volgt. L_∞ is één van de raaklijnen door i_1, de andere is niet reëel. De toegevoegd complexe daarvan gaat door i_2, dus deze twee snijden elkaar in het reële brandpunt f. De pool van de middellijn M door f is het oneigenlijke punt van de lijn door f ⊥ M, dus M is de as. Zij t de top, T de topraaklijn. Pas de duale van (11.7)) toe op T, L_∞ en een willekeurige raaklijn ℓ. Is $p = T \cap \ell$, dan moet dus $p \oplus f \perp \ell$ staan. Dit geeft een constructie voor f en omgekeerd als f bekend is, voor de raaklijn uit p.

De hoek van twee rechten hangt alleen van hun richtingen, dus hun oneigenlijke punten af; speciaal de rechte hoek is gekenmerkt door harmonische ligging van deze punten met de isotrope punten. Voor willekeurige hoeken leggen we een verband met de DV.

De lijn A door ⌈0,0⌉, die een hoek ϕ met de 1-as ⌊0,0,1⌋ maakt, snijdt de lijn ⌊1,-1,0⌋ door ⌈1,0⌉ evenwijdig aan de 2-as in een punt ⌈1,ξ⌉=⌈1,1,ξ⌉, waarin ξ=tg ϕ, en heeft oneigenlijk punt a=⌈0,1,ξ⌉ met projectieve coördi-



Figuur 42.

naat ξ. Evenzo heeft de lijn B door $\ulcorner 0,0 \urcorner$ die een hoek ψ met de 1-as maakt een oneigenlijk punt b met projectieve coördinaat $\eta = \text{tg}\ \psi$.

$$DV(i_1,a,i_2,b) = \frac{\eta - i}{\xi - i} : \frac{\eta + i}{\xi + i} = \frac{\text{tg}\ \psi - i}{\text{tg}\ \phi - i} : \frac{\text{tg}\ \psi + i}{\text{tg}\ \phi + i} =$$

$$\frac{\cos\psi - i\sin\psi}{\cos\phi - i\sin\phi} : \frac{\cos\psi + i\sin\psi}{\cos\phi + i\sin\phi} = \frac{e^{i\psi}}{e^{i\phi}} : \frac{e^{-i\psi}}{e^{-i\phi}} = e^{2i(\psi - \phi)}$$

In overeenstemming hiermee stellen we in een willekeurig aequiform vlak:

(16.11) Definitie

In een aequiform vlak met isotrope punten i_1, i_2 is de hoek van twee rechten A, B met oneigenlijke punten a, b het reële getal

$$\angle(A,B) = \frac{1}{2i} \log DV(i_1,a,i_2,b).$$

Omdat $\bar{i}_1 = i_2$ en a,b reëel is $|DV(i_1,a,i_2,b)| = 1$. De hier ingevoerde hoek is op veelvouden van π na bepaald, dus feitelijk is $\angle(A,B) \in \mathbb{R} \bmod \pi$. Het is de geöriënteerde hoek van hele, niet gerichte rechten. Duidelijk is

$$A \perp B \Leftrightarrow \angle(A,B) = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Uit de productformule (8.6) volgt

(16.12) $\angle(A,B) + \angle(B,C) \equiv \angle(A,C) \pmod{\pi}$.

In het aequiforme vlak beschouwen we affiene transformaties ϕ, die aequiforme begrippen, met name hoeken, behouden. In het bizonder moeten loodrechte oneigenlijke punten weer in loodrechte oneigenlijke punten overgaan. Dus voor $a,b|L_\infty$, $a \perp b$, d.w.z. $\pi_0 a = b$, moet $\phi a \perp \phi b$, $\pi_0\phi a = \phi b = \phi\pi_0 a$, dus de restrictie π van ϕ tot L_∞ moet met π_0 commuteren: $\pi_0\pi = \pi\pi_0$.

(16.13) Definitie. Een affiene transformatie heet aequiform als hij op L_∞ een projectiviteit induceert die met π_0 commuteert, m.a.w. als hij loodrechte lijnen in loodrechte lijnen overvoert.

De **aequiforme transformaties**, ook wel **gelijkvormigheden** genoemd, vormen de **aequiforme groep** of **gelijkvormigheidsgroep** $GF_2(\mathbb{R}) \subset GA_2(\mathbb{R})$.

Na complexificatie van het vlak geldt voor aequiforme transformaties dat zij i_1 en i_2 vastlaten of verwisselen. In het eerste geval spreken wij van + aequiforme (of een + gelijkvormigheid), in het tweede van - aequiform (- gelijkvormigheid). De + gelijkvormigheden vormen een normale ondergroep $GF_2^+(\mathbb{R}) \lhd GF_2(\mathbb{R})$ van index 2.

Iedere translatie T_a is + aequiform. Een willekeurige aequiforme transformatie π is te schrijven in de vorm $\pi = T_a B$, waarin $B = T_{-a}\pi$ een aequiforme lineaire transformatie van $\mathbb{R}^2$ is. We gaan nu alle mogelijke dergelijke B bepalen:

(i) B + aequiform. De rechten door $o = \ulcorner 0,0 \urcorner$ en de isotrope punten $i_1 = \ulcorner 0,1,i \urcorner$ en $i_2 = \ulcorner 0,1,-i \urcorner$ zijn vast, dus de op deze rechten gelegen punten $\ulcorner 1,i \urcorner$ en $\ulcorner 1,-i \urcorner$ zijn eigenvectoren bij eigenwaarden λ resp. $\bar{\lambda}$, die complex geconjugeerd moeten zijn omdat $B = \bar{B}$. De "eenvoudigste reële vorm" van B is

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,\lambda & -\mathrm{Im}\,\lambda \\ \mathrm{Im}\,\lambda & \mathrm{Re}\,\lambda \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} = H_\rho R_\phi \text{ , waarin } \lambda = \rho e^{i\phi},$$

en wordt aangenomen op de 1-vectoren $\mathrm{Re}\ulcorner 1,i \urcorner = \ulcorner 1,0 \urcorner$, $\mathrm{Im}\ulcorner 1,i \urcorner = \ulcorner 0,1 \urcorner$.

(De homothetie $H_\rho : x \mapsto \rho x$ is de affiene gedaante van de dilatatie met centrum o en as L_∞; R_ϕ is de vlakke draaiing om o over ϕ).

(ii) B - aequiform. Dan is $B\ulcorner 1,i \urcorner = \mu \ulcorner 1,-i \urcorner$, $B\ulcorner 1,-i \urcorner = \bar{\mu}\ulcorner 1,i \urcorner$, dus op deze vectoren als basis heeft B als matrix

$\begin{pmatrix} 0 & \bar{\mu} \\ \mu & 0 \end{pmatrix}$, op de 1-vectoren $\begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,\mu & \mathrm{Im}\,\mu \\ \mathrm{Im}\,\mu & -\mathrm{Re}\,\mu \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix} =$

$H_\rho S_\phi$, waarin $\mu = \rho e^{i\phi}$. De eigenvectoren zijn $(\cos \frac{1}{2}\phi, \sin \frac{1}{2}\phi)$ en $\ulcorner -\sin \frac{1}{2}\phi, \cos \frac{1}{2}\phi \urcorner$ bij eigenwaarden ρ resp. $-\rho$. (S_ϕ is de vlakke spiegeling waarvan de spiegel hoek $\frac{1}{2}\phi$ met de 1-as maakt).

(16.14) Iedere aequiforme transformatie π is eenduidig te schrijven in de vorm

$$\pi = T_a H_\rho R_\phi \quad \text{of} \quad \pi = T_a H_\rho S_\phi$$

naargelang π + of - aequiform is.

De aequiforme en + aequiforme groep zijn semidirect product

(16.15) $$GF_2(\mathbb{R}) = T(\mathbb{R}^2)H(\mathbb{R}^2)O_2(\mathbb{R}),$$
$$GF_2^+(\mathbb{R}) = T(\mathbb{R}^2)H(\mathbb{R}^2)O_2^+(\mathbb{R});$$

waarin $O_2(\mathbb{R})$ en $O_2^+(\mathbb{R})$ de vlakke orthogonale resp. rotatiegroep zijn.

Opgaven.

16.1. De middelloodlijn van twee punten a en b is de lijn door het midden van a en b, loodrecht op a ⊕ b. Bewijs: als a en b op een cirkel liggen, gaat hun middelloodlijn door het middelpunt van die cirkel.

16.2. Bewijs in het aequiforme vlak: L(A,B) = -L(B,A).

16.3. Laten A, B, C, D vier rechten in een waaier van het aequiforme vlak zijn. Bewijs:

$$H(A,C,B,D) \ \& \ C \perp D \Rightarrow \angle(A,C) = -\angle(B,C),$$
$$\angle(A,D) = -\angle(B,D),$$

m.a.w. C en D zijn de bisectrices van A, B.

16.4. Zij C een kegelsnede, geen cirkel, f een brandpunt. Laat zien dat:

(i) Voor een uitwendig punt p, met raakpunten s, s' is f+p een bisectrix aan f⊕s, f⊕s' (bepaal de aan f⊕p toegevoegde rechte in de waaier f en gebruik opgave 16.2).

Zij C een ellips of hyperbool, f' het tweede brandpunt.

(ii) De raaklijn in s is een bisectrix van s⊕f, s⊕f' (neem p op de raaklijn in een top van f⊕f' en gebruik i); concludeer:

Een ellips reflecteert de lichtstralen uit één brandpunt naar het andere.

Zij C een parabool, m het oneigenlijke punt, dan is

(iii) de raaklijn in s een bisectrix van s⊕f, s⊕m.

16.5. Zij C een cirkel, a, b punten van C.
Geef een + aequiforme transformatie π aan die de projectiviteit $a \oplus x \mapsto b \oplus x$ $(x \in C)$ van de waaiers met toppen a, b induceert.

16.6. Zij π een + resp. - aequiforme transformatie.
Bewijs voor elk paar rechten A,B

$$\angle(\pi A, \pi B) = \angle(A,B) \text{ resp. } -\angle(A,B).$$

16.7. Neem een vaste rechte A_0 in het aequiforme vlak. Toon aan dat bij een + resp. - aequiforme transformatie π voor elke rechte A

$$\angle(A_0, \pi A) = \angle(A_0, A) + \angle(A_0, \pi A_0), \text{ resp.}$$
$$-\angle(A_0, A) + \angle(A_0, \pi A_0).$$

Bij de volgende constructies is naast het snijden van rechten en het verbinden van punten ook het trekken van een rechte door een gegeven punt, evenwijdig aan een gegeven rechte, toegestaan.

16.8. Het aequiforme vlak is vastegelegd door 2 paar loodrechte rechten. Construeer een lijn loodrecht op een willekeurig gegeven lijn. (Gebruik opgave 8.3. ii).

16.9. Van een cirkel C zijn drie punten gegeven. Construeer het tweede snijpunt met C van een lijn door één van die punten.

16.10. Van een parabool zijn het brandpunt en de top gegeven. Construeer de raaklijn evenwijdig met een gegeven lijn L, als verder nog twee paar loodrechte lijnen zijn gegeven.

In plaats van 2 paar loodrechte rechten is voor de volgende opgaven een vaste cirkel C_0 gegeven, waarvan de snijpunten met iedere rechte bepaald kan worden.

16.11. Construeer een lijn loodrecht op een willekeurig gegeven lijn; construeer ook het middelpunt van C_0.

16.12. Van een kegelsnede C zijn twee paar toegevoegde middellijnen gegeven. Construeer de assen.

16.13. Van een hyperbool zijn de toppen en een punt daarbuiten gegeven. Construeer de asymptoten.

16.14. Gegeven een lijn L en twee punten a en b, niet op L. Geef aan hoe men de raakpunten met L van de cirkels door a en b construeert die raken aan L. Hoeveel oplossingen zijn er mogelijk ?
Aanwijzing : zie opgaven 13.4 en 16.11.

16.15. Van een ellips zijn gegeven de brandpunten en een top. Construeer de andere toppen. (Aanwijzing: bekijk op de raaklijn in de bekende top de afbeelding $x \mapsto y$ als $x \oplus f_1 \perp y \oplus f_1$ of $x \oplus f_1 \perp y \oplus f_2$).

§17 Het euclidische vlak. Spiegelingen.

In een affien vlak kunnen we een georiënteerde oppervlakte $\mathcal{A}(x,y,z)$ voor een driehoek xyz invoeren door een coördinatenstelsel te kiezen, en als $x=\ulcorner\xi_1,\xi_2\urcorner$, $y=\ulcorner\eta_1,\eta_2\urcorner$, $z=\ulcorner\zeta_1,\zeta_2\urcorner$ te stellen.

(17.1) $$\mathcal{A}(x,y,z) = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{2}d(y-x,z-x)$$

(d is de 2-vorm, waarvoor $d(\ulcorner 1,0\urcorner,\ulcorner 0,1\urcorner) = 1$, alias de 2X2 determinant van de vectoren.)

Zij π een affiene transformatie. Schrijf deze als $\pi = T_aB$ met B lineair. Dan is $\pi y-\pi x = B(y-x)$, dus

$\mathcal{A}(\pi x,\pi y,\pi z) = \tfrac{1}{2}d(B(y-x),B(z-x)) = \det B\ \tfrac{1}{2}d(y-x,z-x) =$ $\det B\ \mathcal{A}(x,y,z)$. Zoals bekend hangt det B niet af van d, dus niet van $\mathcal{A}$, bij gelijkblijvende oorsprong o; verder kan de oorsprong verplaatst worden zonder $\mathcal{A}$ te veranderen, zodat det B alleen van π afhangt. We noemen dit getal ook de determinant van π:

(17.2) $$\mathcal{A}(\pi x,\pi y,\pi z) = \det \pi\ \mathcal{A}(x,y,z)$$

voor alle x, y, z èn voor iedere geöriënteerde oppervlakte functie $\mathcal{A}$.

De in (16.13) beschreven + en - aequiforme transformaties hebben determinant ρ^2 resp. $-\rho^2$.

In het euclidische vlak zijn twee gelijkvormige driehoeken congruent als ook hun oppervlakten (in absolute waarde) gelijk zijn. In een aequiform vlak stellen we:

(17.3) Definitie.

Een congruentie is een aequiforme transformatie π met $|\det \pi| = 1$; een beweging is een aequiforme transformatie π met $\det \pi = 1$.

Een beweging is dus een + aequiforme congruentie, en heet ook wel + congruentie; een - aequiforme congruentie heeft determinant -1 en heet - congruentie. Uit (16.14) concluderen we:

(17.4) Iedere congruentie π is eenduidig te schrijven in de vorm

$$\pi = T_a R_\phi \quad \text{of} \quad \pi = T_a S_\phi$$

naargelang π + of - congruent is.
De congruenties vormen een normale ondergroep $GM_2(\mathbb{R})$ van de aequiforme groep $GF_2(\mathbb{R})$; de + congruenties een normale ondergroep $GM_2^+(\mathbb{R})$ van $GM_2(\mathbb{R})$. Deze zijn weer semidirecte producten

$$GM_2(\mathbb{R}) = T(\mathbb{R}^2)O_2(\mathbb{R}),$$

$$GM_2(\mathbb{R}) = T(\mathbb{R}^2)O_2^+(\mathbb{R}).$$

We willen deze algebraïsche invoering van congruenties vervangen door een meetkundige. Daarvoor onderzoeken we welke quasiperspectiviteiten congruenties zijn.

Zij ϕ een quasiperspectiviteit met as P en centrum p, $\phi \neq I$.
Als ϕ affien is moet $\phi L_\infty = L_\infty$, dus $P = L_\infty$ of $p | L_\infty$.

(i) $P = L_\infty$ & $p | L_\infty$: ϕ is translatie, + congruent

(ii) $P = L_\infty$, $p \nmid L_\infty$: ϕ is dilatatie uit p, kies dit als oorsprong, dan blijkt ϕ aequiform als $\phi = H_\rho$ of $\phi = H_\rho R_\pi = H_{-\rho}$; hiervan is buiten ϕ=id. alleen de involutie $\phi = R_\pi$ (puntspiegeling in p) + congruent.

(iii) $p | L_\infty$, $P \neq L_\infty$: aangezien L_∞ niet puntsgewijs vast is, moet, als ϕ aequiform is, $\phi(i_1) = i_2$, $\phi(i_2) = i_1$, dus ϕ involutie; wegens $H(p, L_\infty \cap P, i_1, i_2)$ zijn p en de richting van P loodrecht; kies de oorsprong op P, dan blijkt ϕ een spiegeling, - congruent.

(17.5) Definitie.

De spiegeling S_P aan de rechte P van een aequiform vlak is de involutorische quasiperspectiviteit met as P en als centrum $p | L_\infty$ de toegevoegde van $L_\infty \cap P$ onder de rechtehoeken involutie.

Uit deze spiegelingen gaan we de congruenties opbouwen:

Bij twee punten $a \neq a'$ is er precies één spiegeling S_P met $S_P a = a'$: de spiegel P moet de middelloodlijn zijn, de rechte loodrecht $a+a'$ door het 4^e harmonische van $L_\infty \cap (a+a')$ ten opzichte van a, a'.

In het reële affiene of aequiforme vlak verdeelt een punt m op een rechte A deze in twee halve rechten $A_>$ en $A_<$, nl. de deelverzamelingen waar een affiene coördinaat, die 0 in m is, > 0 resp. < 0 is. $A_>$ snijdt een cirkel met middelpunt m in één punt a (het andere snijpunt a' van A met C behoort tot $A_<$).

Bij twee halve rechten $A_>, A'_>$ uit hetzelfde punt m is er precies één spiegeling S_P met $S_P A_> = A'_>$: zij $L_\infty \cap A = a$, $L_\infty \cap A' = a'$, wegens $H(p, a, L_\infty \cap P, a')$ moet $p, L_\infty \cap P$ het loodrechte paar c,d uit de involutie met vaste punten a,a' zijn (16.6); van de twee spiegelingen S_P, S_Q met $P = m \oplus c$, $p = d$ en $Q = m \oplus d$, $a = c$, waarvoor $S_P A = A'$ en $S_Q A = A'$, voldoet slechts één: is b.v. $S_P A_> = A'_>$, dan is $S_Q A_> = S_Q S_P^{-1} A'_> =$ $S_Q S_P A'_> = A'_<$, want $S_Q S_P = S_P S_Q$ is de involutorische quasiperspectiviteit met as L_∞ en centrum m, dus de puntspiegeling in m.

Neem een halve rechte A uit een punt m.
Uit (17.4) volgt: de congruenties π met $\pi m = m$, $\pi A_> = A_>$ zijn $\pi = I$ en $\pi = S_A$ (neem de coördinaten zo dat m=0 en $A_>$ positieve 1-as).

Zij π een willekeurige congruentie. Als $\pi m \neq m$ is er een spiegeling S_P met $S_P m = \pi m$; als $\pi A_> \neq S_P A_>$ is er een spiegeling S_Q met $S_Q S_P A_> = \pi A_>$. Dan is $\pi^{-1} S_Q S_P m = m$ en $\pi^{-1} S_Q S_P A_> = A_>$, dus hetzij $\pi^{-1} S_Q S_P = I$, $\pi = S_Q S_P$, hetzij $\pi^{-1} S_Q S_P = S_A$, $\pi = S_Q S_P S_A$; eventueel kunnen S_P of S_Q vervallen. Iedere congruentie is dus product van ten hoogste 3 spiegelingen. We kunnen daarom (17.3) vervangen door

(17.6) Definitie.

Een congruentie is een eindig product van spiegelingen; een beweging is een + aequiforme congruentie.

Aangezien een spiegeling - aequiform is, moet een beweging product van een even aantal, een - congruentie-

product van een oneven aantal spiegelingen zijn. Dat ten hoogste 3 spiegelingen nodig zijn, moet wel langs algebraïsche weg, zoals met (17.4), afgeleid worden. We inventariseren nu alle typen congruenties:

Een congruentie π met twee vaste punten a,b is $\pi=I$ of $\pi=S_P$ met P=a+b (overeenstemming in de vier punten a, b, i_1, i_2 in algemene ligging).

Zij $\pi = S_P S_Q$, $P \neq Q$. We onderscheiden
(i) P // Q: beide spiegelingen hebben hetzelfde centrum en induceren op L_∞ dezelfde involutie, π is quasiperspectiviteit met datzelfde centrum en as L_∞, dus een translatie in de richting loodrecht op de spiegels.
(ii) $P \cap Q = m \not| L_\infty$: π is een draaiïng om m, dat het enige vaste punt is. S_P en S_Q commuteren, $S_P S_Q = S_Q S_P$, als $S_P = S_Q S_P S_Q = S_{S_Q P}$, dus $P = S_Q P$, P loodrecht Q; dan is

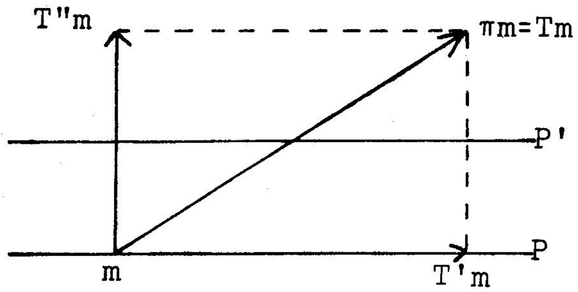
$\pi = S_P S_Q = S_Q S_P$ involutorisch: de puntspiegeling in m

Zij C een cirkel om m. Een spiegeling S_P met m|P beeldt C op zichzelf af; dus iedere draaiïng om m voert C in zichzelf over. Bij twee punten a,b van C is er precies één draaiïng π om m met $\pi a=b$: stel $A=m\oplus a$, $B=m\oplus b$, laat $A_>$, $B_>$ de halve rechten van A resp. B zijn die C in a resp. b snijden; er is een spiegeling S_P waarvoor $S_P m=m$, $S_P A_> = B_>$, dus $S_P a = b$; $\pi = S_P S_A = S_B S_P$ is de gezochte draaiïng, die uniek is omdat m, a, i_1, i_2 algemeen liggen. Een draaiïng $\pi \neq I$, die een rechte A door m in zichzelf overvoert, moet de snijpunten van A met een cirkel C om m verwisselen, dus de puntspiegeling $\pi = S_P S_Q$ zijn, waarbij P,Q een willekeurig loodrecht paar rechten door m mag zijn.

Een reële involutie, die twee complex geconjugeerde punten verwisselt, is hyperbolisch (ga na).
Een - congruentie π bezit dus twee loodrechte invariante richtingen p,q op L_∞.
(iii) π bezit een vast punt m: stel $P=m\oplus p$, $Q=m\oplus q$; $S_P\pi$ is een draaiïng om m, die P vast houdt, dus hetzij $S_P\pi=I$, $\pi=S_P$, hetzij $S_P\pi=S_P S_Q$, $\pi = S_Q$.

(iv) π bezit geen vast punt: neem een punt m, zij T de translatie waarvoor $Tm=\pi m$, dan is $T^{-1}\pi=S_P$, $\pi=TS_P$, $P=m+p$ (of hetzelfde met q);

ontbind $T=T'T''$ in translaties T' langs P en $T'' \perp P$, dan is $T''S_P$ de spiegeling aan de middelloodlijn P' van $mT''m$, dus $\pi=T'S_{P'}$, product van een spiegeling en een translatie langs de spiegel, een **glijspiegeling**.



Figuur 43.

(17.7) Typen van congruenties.

	aantal spiegelingen	ligging spiegels
identiteit	0	-
spiegeling	1	-
translatie	2	evenwijdig verschillend
draaiïng	2	niet evenwijdig
speciaal:		
puntspiegeling	2	loodrecht
glijspiegeling	3	niet alle evenwijdig niet alle door één punt.

De begrippen cirkel en congruentie zijn in het aequiforme vlak gedefinieerd zonder het begrip afstand; we gaan dit nu - tegengesteld aan de gang bij de euclidische meetkunde - invoeren met behulp van de congruenties.

Wijs een puntenpaar o,e in het aequiforme vlak aan als standaard om de afstand mee te ijken: $|oe| = 1$.

Voer op de rechte $E=o+e$ een projectieve coördinaat in die in o, e, $L_\infty \cap E$ de waarden 0, 1, ∞ aanneemt, $E_>$ is de halve rechte uit o die e bevat;voor een punt $x \in E_>$ met coördinaat ξ is de afstand $|ox| = \xi$. Een willekeurig paar voeren we met een congruentie over in zo'n paar o,x.

(17.8) Definitie

Zij a, b een paar punten, $A_>$ de halve rechte uit a die b bevat, π een congruentie waarvoor $\pi a=o$, $\pi A_> = E_>$, en heeft πb ten opzichte van o, e, $L_\infty \cap E$ projectieve coördinaat ξ, dan is dit reële getal de afstand van a en b

$$|ab| = \xi.$$

Voldoet ook de congruentie $\pi' \neq \pi$, dan is $\pi' = S_E \pi$, dus $\pi' b = \pi b$.

Twee punten $x, y \in E$ met coördinaten ξ, η hebben afstand $|xy| = |\eta - \xi|$: neem $\pi = T_{-x}$ als $\xi < \eta$, $\pi = S_\pi T_{-x}$ als $\xi > \eta$.

Voor drie collineaire punten a, b, c met b tussen a en c (d.w.z. a en c behoren tot verschillende halve rechten uit b) is $|ab|+|bc| = |ac|$.

Twee punten paren a, b en c, d hebben dezelfde afstand $|ab| = |cd|$ als er een congruentie π is met $\pi a=c$, $\pi b=d$, en omgekeerd.

Een aequiforme transformatie voert twee puntenparen met gelijke afstand over in twee puntenparen met gelijke afstand: is π een congruentie, $\pi a=c$, $\pi b=d$, en ψ aequiform, dan is $\psi\pi\psi^{-1}$ een congruentie, en $(\psi\pi\psi^{-1})\psi a=\psi c$, $(\psi\pi\psi^{-1})\, b = \psi d$.

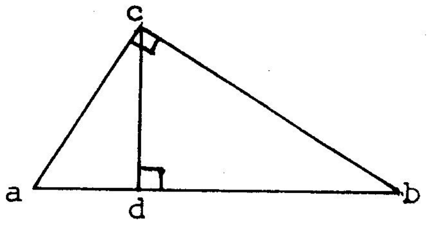
(17.9) Een aequiforme transformatie π, van de gedaante $\pi = T_a\, H_\rho\, R_\phi$ of $\pi = T_a\, H_\rho\, R_\phi$, vermenigvuldigt alle afstanden met hetzelfde getal $\rho > 0$.

Immers T_a, R_ϕ, S_ϕ zijn congruenties, en $x \in E_>$ met coördinaat ξ gaat over in $H_\rho x \in E_>$ met coördinaat $\rho\xi$.

(17.10) Stelling van PYTHAGORAS

Zijn a, b, c drie punten zodat $a \oplus c \perp b \oplus c$, dan is $|ac|^2+|bc|^2 = |ab|^2$.

Er is een aequiforme π waarvoor $\pi a=a$, $\pi b=c$, $\pi(a\oplus c)=(a\oplus b)$, die de halve rechte uit a die c bevat overvoert in de halve rechte uit a die b bevat; zij $\pi c=d$. Dan $a+d \perp c+d$, dus d voetpunt van de loodlijn uit c op a+b.



Figuur 44.

$$\frac{|ac|}{|ab|} = \frac{|ad|}{|ac|}, \ |ac|^2 = |ab|\ |ad|.$$

Evenzo is $|bc|^2 = |ab|\ |db|$.

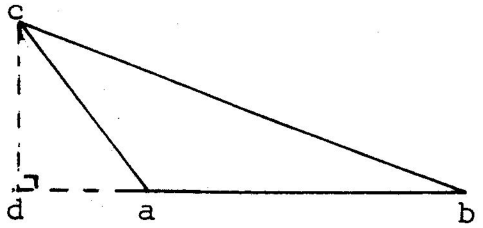
Dus $|ac|^2 + |bc|^2 = |ab|(|ad| + |db|) = |ab|^2$.

Aan dit bewijs ontbreekt nog dat d tussen a en b ligt - hierop komen wij bij (18.5) terug.

Nu volgt de driehoeksongelijkheid:

de hypotenusa is groter dan elke rechthoekszijde, dus $|ac| \geqslant |ad|, |bc| \geqslant |bd|$

$|ac| + |bc| \geqslant |ad| + |bd| \geqslant |ab|$.

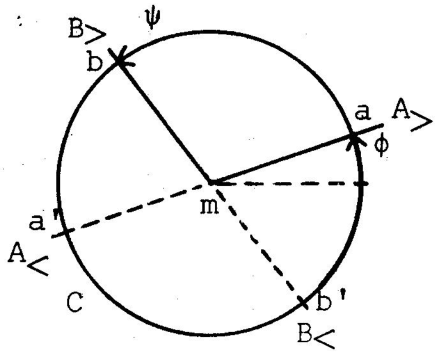


Figuur 45.

(17.11) Het aequiforme vlak is met de in (17.8) gedefinieerde afstand een metrische ruimte; dit heet het euclidische vlak.

Vullen we $o = \ulcorner 0,0 \urcorner$, $e = \ulcorner 1,0 \urcorner$ aan met $f = \ulcorner 0,1 \urcorner$ zo dat $o\oplus e \perp o\oplus f$ en $|of| = 1$, dan wordt de afstand in coordinaten gegeven door de norm van de $\mathbb{R}^2$ met inproduct.

In het euclidische vlak willen we ook de gewone, op veelvouden van 2π na bepalade hoek van twee halve rechten $A_>$, $B_>$ uit een punt m invoeren. Deze meten we langs een cirkel C om m. Hiervoor gebruiken we DV_C van de isotrope punten en de snijpunten a,b van $A_>$, $B_>$ met C.



Figuur 46.

Laten c,d de oneigenlijke punten van A resp. B zijn, pas (13.5) toe met de isotrope punten voor p,q:

$$DV_C(i_1, a, i_2, b)^2 = DV(i_1, c, i_2, d) = e^{2i(\psi-\phi)},$$

waarin ψ, ϕ de georiënteerde hoeken van $A_>$ resp. $B_>$ met de positieve 1-as zijn. We stellen daarom:

(17.12) Definitie.

In een aequiform vlak met isotrope punten i_1, i_2 is de hoek van twee halve rechten $A_>$, $B_>$ uit een punt m, die een cirkel C om m snijden in a resp. b, het reële getal

$$\measuredangle(A_>,B_>) = \frac{1}{i}\log DV_C(i_1,a,i_2,b).$$

Dit hangt niet van de keuze van C af. Deze hoek is op veelvouden van 2π na bepaald: $\measuredangle(A_>,B_>) \in \mathbb{R} \bmod 2\pi$; en wegens (13.5) is

(17.13) $$\measuredangle(A_>,B_>) \equiv \angle(A,B) \pmod{\pi}.$$

Zij π een aequiforme transformatie. Dan zijn $\pi A_>$, $\pi B_>$ halve rechten uit πm, die de cirkel πC om πm snijden in πa resp. πb.

$\measuredangle(\pi A_>,\pi B_>) = \frac{1}{i}\log DV_{\pi C}(i_1,\pi a,i_2,\pi b) =$

als π + aequiform, dus $\pi i_1 = i_1$, $\pi i_2 = i_2$:

$\frac{1}{i}\log DV(\pi i_1,\pi a,\pi i_2,\pi b) = \frac{1}{i}\log DV(i_1,a,i_2,b) = \measuredangle(A_>,B_>)$;

als π - aequiform, dus $\pi i_1 = i_2$, $\pi i_2 = i_1$:

$\frac{1}{i}\log DV(\pi i_2,\pi a,\pi i_1,\pi b) =$ wegens (16.2)

$\frac{1}{i}\log DV(\pi i_1,\pi a,\pi i_2,\pi b)^{-1} = -\frac{1}{i}\log DV(i_1,a,i_2,b) = -\measuredangle(A_>,B_>)$.

Net zo voor de hoek van hele rechten.

(17.14) Onder een + resp. - aequiforme transformatie π is

$$\angle(\pi A,\pi B) = \angle(A,B) \text{ resp. } -\angle(A,B),$$
$$\measuredangle(\pi A_>,\pi B_>) = \measuredangle(A_>,B_>) \text{ resp. } -\measuredangle(A_>,B_>).$$

Opgaven

17.1 Zij C een parabool, p,q punten van C, r het snijpunt van de raaklijnen in p,q en $R = p \oplus q$.

(i) De raaklijn S // R aan C snijdt $p \oplus r$ en $q \oplus r$ in s_1 resp. s_2. Toon aan dat $\mathcal{A}(s_1 r s_2) = \frac{1}{4}\mathcal{A}(prq)$.

(ii) De oppervlakte ingesloten door de koorde pq en het tussen deze punten gelegen stuk van C (het parabolisch segment) is $\frac{2}{3}\mathcal{A}(prq)$. (Snijd de hoek bij r af met een raaklijn, dan de twee daardoor ontstane hoeken, enz., en ga over tot de limiet.)

17.2 Beschouw een driehoek abc. Laat de geöriënteerde oppervlakte geijkt zijn door $\mathcal{A}(oef)=\frac{1}{2}$, waar $(o\oplus e) \perp (o\oplus f)$, $|oe| = |of| = 1$.

(i) Bewijs de formule voor de (ongeöriënteerde) oppervlakte van een driehoek "$\frac{1}{2}$ basis X hoogte"
$|\mathcal{A}(a,b,c)| = \frac{1}{2}|ab|\ |cp|$, waar p de orthogonale projectie van c op $a\oplus b$ is (voetpunt van de hoogtelijn).

(ii) Een punt p op een bisectrix van $c\oplus a$, $c\oplus b$ heeft gelijke afstanden tot $c\oplus a$ en $c\oplus b$.

(iii) Zij d het snijpunt van deze bisectrix met $a\oplus b$, dan is $|ad| : |bd| = |ac| : |bc|$.

17.3 Toon aan dat de deelverzamelingen $A_>$, $A_<$ waarin een punt m van de rechte A in het reële affiene vlak A verdeelt niet afhangen van de projectieve coördinaat waarmee ze gedefinieerd zijn (afgezien van verwisseling van > en <).

17.4 Bewijs in het aequiforme vlak:

(i) $\measuredangle(A_>,B_>) = -\measuredangle(B_>,A_>)$;

(ii) $\measuredangle(A_>,B_>) = \measuredangle(A_<,B_>)+\pi$.

17.5 Op een cirkel C met middelpunt m van het aequiforme vlak zijn a, b de snijpunten van de halve rechten $A_>$, $B_<$ met C. Verefieer de stelling van middelpunts- en omtrekshoek: voor ieder punt p van C is

$$\angle(p\oplus a,p\oplus b) = \tfrac{1}{2}\measuredangle(A_>,B_>).$$

17.6 P en Q zijn evenwijdige rechten in het aequiforme vlak. Ga na:

(i) voor ieder punt x is de verbindingslijn $(x\oplus S_P\ S_Q\ x) \perp P,Q$, en de afstand $\delta = |x\ S_P\ S_Q\ x|$ is onafhankelijk van x;

(ii) voor iedere rechte $R \perp P,Q$ hebben de snijpunten $s_1 = P\cap R$, $s_2 = Q\cap R$ de afstand $|s_1 s_2| = \frac{1}{2}\delta$; dit heet de afstand van de evenwijdige rechten P,Q, m.a.w. het product van twee spiegelingen is een translatie loodrecht op de spiegels over het dubbele van de afstand van de spiegels.

17.7 (i) Bewijs dat de + aequiforme transformaties die een gegeven cirkel op zichzelf afbeelden, een commutatieve groep vormen, zonder (16.14) te gebruiken. (Aanwijzing: opgave 15.7 i).

(ii) Leid hieruit af: zijn P,Q,P',Q' rechten door één punt m, dan is $S_PS_QS_{P'}S_{Q'} = S_{P'}S_{Q'}S_PS_Q$.

(iii) Leid op overeenkomstige wijze af: zijn P,Q,P',Q' evenwijdige rechten, dan is ook $S_PS_QS_{P'}S_{Q'} = S_{P'}S_{Q'}S_PS_Q$.
(Bekijk nu wat gebeurt op een rechte loodrecht alle spiegels).

(iv) Zij G de groep gevormd door alle even producten van spiegelingen, met spiegels door een vast gegeven punt, hetzij eigenlijk, hetzij oneigenlijk. Bewijs dat G commutatief is.

17.8 $P_1,\ldots,P_4$ zijn rechten in het aequiforme vlak. Bewijs:

(i) $S_{P_1}S_{P_2} = S_{P_3}S_{P_4} \Rightarrow$ er is een rechte Q zodat $S_Q\,P_1 = P_3$ & $S_Q\,S_{P_1}P_2 = P_4$ (Ga na dat er steeds een rechte Q is waarvoor $S_QP_1 = P_3$; druk S_{P_3} uit in S_{P_1} en S_Q. Onderscheid twee gevallen:

a) $P_1 \not\parallel P_2$; dan $P_1 \cap P_2 \,|\, P_3, P_4$; gebruik opgave 7, ii).

b) $P_1 \parallel P_2$; als $P_1 \not\parallel P_3$, dan te herleiden tot vorig geval, $\lightning$ dus ook $P_1 \parallel P_3, P_4$; gebruik opgave 7, iii). Concludeer:

als $P_1 \parallel P_2$: $S_{P_1}S_{P_2} = S_{P_3}S_{P_4} \Rightarrow$ er is een translatie T zodat $TP_1=P_3$, $TP_2=P_4$, dus: $P_1,\ldots,P_4$ alle evenwijdig en afstand P_1P_2 = afstand P_3P_4;

als $P_1 \not\parallel P_2$: $S_{P_1}S_{P_2} = S_{P_3}S_{P_4} \Rightarrow$ er is een draaiing R om $m = P_1 \cap P_2$ zodat $RP_1=P_3$, $RP_2=P_4$, dus: $P_1,\ldots,P_4$ alle door één punt en $\angle(P_1,P_2) = \angle(P_3,P_4)$.

Leid hieruit af de "stelling van de 3 spiegelingen":

(ii) $S_P\,S_Q\,S_R$ is spiegeling $\Leftrightarrow$ P,Q,R alle door één punt of alle evenwijdig.

Toon verder aan:

(iii) ieder product van 4 spiegelingen is te schrijven als product van 2 spiegelingen; iedere congruentie, gedefinieerd in (17.6), is product van ten hoogste 3 spiegelingen. (Hiervoor is nu opg.15.7 i) in plaats van (17.4) gebruikt.)

17.9 We schrijven S_p voor de puntspiegeling in p.

(i) Bepaal de gedaante van

$S_a\,S_B$, $S_A\,S_b$, $S_a\,S_b$, $S_aS_bS_c$; constateer:

een product van 2 puntspiegelingen is een translatie,
een product van 3 puntspiegelingen is een puntspiegeling.

(ii) Onderzoek hoe de punten a,b,... en de rechten A,B,... moeten liggen opdat

$S_a S_B = S_C S_d$, $S_a S_B = S_B S_c$, $S_a S_B = S_B S_a$,

$S_a S_b = S_c S_d$, $S_a S_b = S_b S_c$, $S_a S_b = S_b S_a$.

(iii) Laten R,R' draaiingen om m resp. m' zijn over ϕ resp. ϕ', T een translatie; bepaal draaipunt en draaihoek van RR', R'R, RT, TR.

17.10 Op een rechte A door een punt a kan een projectieve coördinaat ingevoerd worden, die 0 is in a, zodat als de punten x,y van A coördinaat ξ resp. η hebben $|xy| = |\eta - \xi|$.

(i) Zij C een ellips of hyperbool, A,B evenwijdige raaklijnen van C met raakpunten a resp. b. Zij $\pi : A \to B$ de projectiviteit die C als kegelsnede voortbrengt ($\pi x * y \Leftrightarrow x+y$ raakt C). Dan is $|ax|\ |by|$ constant.

(ii) Zij C een hyperbool, A,B asymptoten van C, m het middelpunt, π als boven. Dan is $|mx|\ |my|$ constant.

17.11 Zij C een kegelsnede, geen cirkel, f een brandpunt, F de bijbehorende <u>richtlijn</u> (d.i. de poollijn van F).

(i) Neem x op C, zij y de orthogonale projectie van x op F (het voetpunt van de loodlijn uit x op F). Bewijs:
$|fx| : |xy| = \varepsilon$ is onafhankelijk van x; ε heet de <u>excentriciteit</u> van C.
(zij x' een ander punt van C, $z = (x+y) \cap F$; merk op dat f+z een bisectrix van f+s, f+s' is en gebruik opg. 9, iii).
C is de verzameling van alle punten, waarvoor de afstanden tot f en F de verhouding ε hebben.
Voor een parabool is $\varepsilon=1$.

(ii) Zij nu C ellips resp. hyperbool met middelpunt m, brandpunten f,f', richtlijnen F,F', halve aslengten α,β met $\alpha > \beta$, $|mf| = \gamma$ en afstand mF : δ.
Laat zien dat $\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2$, $\delta = \frac{\alpha^2}{\gamma}$, $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} < 1$ voor de ellips, resp. $\gamma^2 = \alpha^2+\beta^2$, $\varepsilon > 1$ voor de hyperbool.
Leid verder af

(iii) Voor x op C is $|fx| \pm |f'x| = 2\alpha$ (+ ellips, - hyperbool)
C is de verzameling van alle punten, waarvoor de afstanden

tot f en f' een vaste som resp. vast verschil hebben.

(iv) Twee kegelsneden kunnen precies dan door een aequiforme transformatie in elkaar overgevoerd worden, indien hun excentriciteiten gelijk zijn; en zijn congruent, indien hun aslengten overeenstemmen.

Bij de volgende constructies is het aequiforme vlak weer vastgelegd door 2 paar loodrechte rechten. Het trekken van evenwijdige rechten is toegestaan.

17.12 (i) Een aequiforme transformatie, die een gegeven punt m vast laat, voert een gegeven rechte A door m over in een gegeven rechte A'. Construeer alleen met de lineaal het beeld van een willekeurige rechte B door m.

(ii) Doe hetzelfde voor een + aequiforme transformatie.

17.13 (i) Van een +aequiforme afbeelding zijn bij twee punten a, b de beelden a',b' gegeven.
Construeer het beeld van een willekeurig punt c.

(ii) Doe hetzelfde voor een - aequiforme afbeelding.

17.14 (i) Van een beweging zijn bij een punt a en een rechte A door a de beelden a',A' gegeven.
Construeer met de lineaal het beeld van een willekeurig punt c, en eventuele vaste punten en invariante rechten.

(ii) Doe hetzelfde voor een glijspiegeling met dezelfde gegevens.

§ 18 Oriëntatie van de reële projectieve rechte.

Een (totale) orde in een verzameling V is een relatie "L" tussen elementen van V met de volgende eigenschappen:

$x < y \& y < z \Rightarrow x < z$ voor alle $x,y,z \in V$ (transitiviteit);
elk tweetal $x,y \in V$ vervult precies één van de drie $x < y$, $x=y$, $x > y$ (trichotomie).
Op een reële affiene rechte L krijgen we een orde door deze over te nemen van $\mathbb{R}$: voer een affiene coördinaat in op L, dat is een projectieve coördinaat die ∞ is in het oneigenlijke punt 1 van L, en stel $x < y \Leftrightarrow \xi < \eta$ voor punten $x,y \in L$ met coördinaten ξ,η. Een andere affiene coördinaten die 0 resp. 1 is in de punten q_0, q_1 met oude coördinaat ξ_0,ξ_1, geeft x nieuwe coördinaat $\xi' = DV(q_0,q_1,1,x) = \frac{\xi-\xi_0}{\xi_1-\xi_0}$ (8.5). Een coördinatentransformatie is van de gedaante $\xi' = \alpha\xi+\beta$, met $\alpha \neq 0$; deze behoudt de orde als $\alpha > 0$, en keert de orde om als $\alpha < 0$, d.w.z. vervangt "<" door een nieuwe orde "<'" waarvoor $x <' y \Leftrightarrow x > y$.
Een affiene rechte bezit dus 2 ordes; door één paar a,b waarvoor $a < b$ is de orde "<" vastgelegd.

Het begrip "tussen" is voor beide ordes hetzelfde:
$(x < y \& y < z) \vee (x > y \& y > z)$.
Voor een affiene coördinaat, die ξ,η,ζ in resp. x,y,z is betekent dit dat van $\eta-\xi$ en $\eta-\zeta$ één positief en één negatief moet zijn. Hun quotiënt is een dubbelverhouding:

(18.1) Definitie.

De deelverhouding ten opzichte van x en z van een punt y op de reële affiene rechte $L = x \oplus z$ (x,y,z alle verschillend) is het reële getal

$$DV(x,y,z) = DV(x,y,z,L \cap L_\infty) = \frac{\eta-\zeta}{\eta-\xi}$$

(waarin ξ,η,ζ affiene coördinaten van x, y, z zijn). De betrekking: "y ligt tussen x en z" schrijft men:

$$[x\ y\ z] \Leftrightarrow x,y,z \text{ collineair } \& \ DV(x,y,z) < 0.$$

De deelverhouding is onafhankelijk van de affiene coördinaat en invariant onder affiene transformaties (8.8); evenzo de "tussen" relatie. Bekende stellingen over deelverhoudingen zijn:

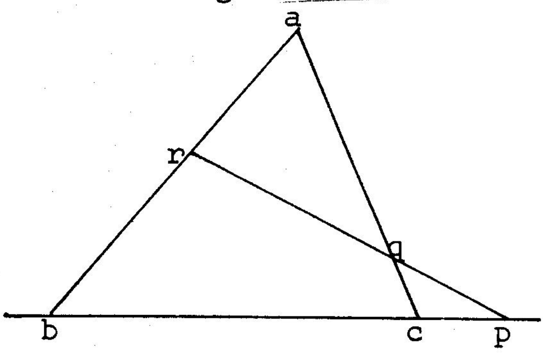
(18.2) Laten de punten p,q,r respectievelijk op de zijden b⊕c, c⊕a, a⊕b van de driehoek a b c liggen. Dan zijn:

(i) a⊕p, b⊕q, c⊕r concurrent ⇔ DV(b,p,q)DV(c,q,a)DV(a,r,b) = -1 (CEVA);

(ii) p,q,r collineair ⇔ DV(b,p,c)DV(c,q,a)DV(a,r,b) = 1 (MENELAOS).

Deze laten zich in geschikt gekozen affiene coördinaten eenvoudig narekenen. Voor "tussen" volgt uit (ii).

(18.3) Is a b c een driehoek, en [bcp] & [cqa] , dan is er een punt r waarvoor [arb] & [pqr] (PASCH).



Figuur 46.

Alle punten tussen a en b vormen het lijnstuk ab = {x | [axb]}.

Een verzameling V heet convex als

$$a,b \in V \Rightarrow ab \subset V$$

De twee halve rechten $A_>$ en $A_<$, waarin een punt m de affiene rechte A verdeelt, zijn maximale convexe deelverzamelingen van A \ {m}, equivalentieklassen van de relatie x ~ y ⇔ non[xmy] ⇔ DV(x,m,y) > 0.
In een aequiform vlak is "tussen" ook bepaald door de afstand:

$$[xyz] \Leftrightarrow |xy| + |yz| = |xz| .$$

Een projectieve rechte, die in zich gesloten is als een cirkel kan niet zo geordend worden, dat de "tussen" relatie dezelfde is als voor een willekeurige projectieve coördinaat. In plaats daarvan gebruiken we "scheiding" van paren.

(18.4) Definitie.

Laten a,b,p,q punten van een reële projectieve rechte zijn. Het paar p,q scheidt het paar a,b geschreven

$$[paqb] \Leftrightarrow DV(paqb) < 0.$$

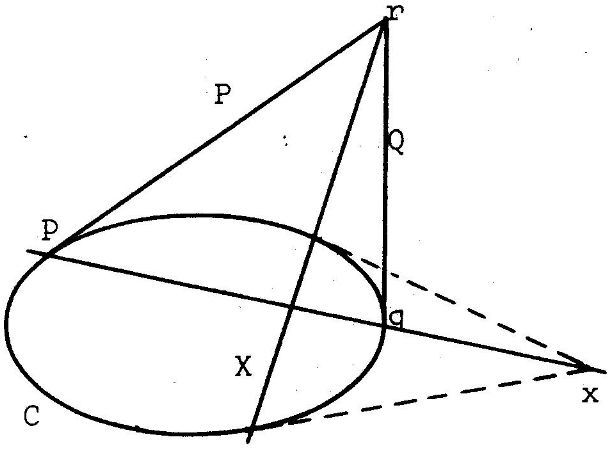
Dit is een symmetrische relatie van ongeordende paren: uit [paqb] volgen [qapb], [apbq], ... net als bij harmonische ligging (4.7). Uit (9.9) blijkt dat harmonische paren elkaar scheiden:

$$H(p,a,q,b) \Rightarrow [paqb]$$

Het paar p,q verdeelt de projectieve rechte p⊕q in twee delen, equivalentieklassen van de relatie

$$x \sim y \Leftrightarrow \text{non}[pxqy] \Leftrightarrow DV(pxqy) > 0.$$

Zij C een kegelsnede in het reële projectieve vlak, p,q ∈ C met raaklijnen P,Q, en r = P ∩ Q pool van p⊕q. Bekijk de punten x,y|p⊕q met poollijnen X,Y|r. Laat x buiten C liggen, dus X snijdt C (zulke x zijn er). Uit (15.4) volgt dat ook y buiten C ligt dan en slechts dan als DV(P,X,Q,Y) > 0, dus omdat DV(P,X,Q,Y) = DV(p,x,q,y) (ga na) als x ~ y.



Figuur 47.

(18.5) Is C een kegelsnede in het reële projectieve vlak, p,q ∈ C, en x,y|p⊕q zodat [pxqy], dan is van x,y één binnen C en één buiten C; de verzameling binnen punten en de verzameling buiten punten van p⊕q zijn de twee delen waarin p,q deze rechte verdeelt.

Nu vullen we het bewijs van (17.10) aan: de loodlijn c⊕d snijdt de cirkel met middellijn a⊕b in c en gaat door de pool van a⊕b; de pool van c⊕d ligt op a⊕b en is buiten,

dus d is binnen ; het oneigenlijke punt $(a+b)\cap L_\infty$ is buiten, derhalve is $DV(a,d,b,(a\oplus b)\cap L_\infty) < 0$, m.a.w. [adb], dus $|ab| = |ad|+|db|$.

Beschouw een involutie π op een reële projectieve rechte die y met y' en z met z' verwisselt (y,y',z,z' alle verschillend). Volgens (8.8) is $\pi x=x' \Leftrightarrow DV(y,z,y',x) = DV(y',z',y,x')$, dit is de gebroken lineaire transformatie, die volgens (8.1) π beschrijft,

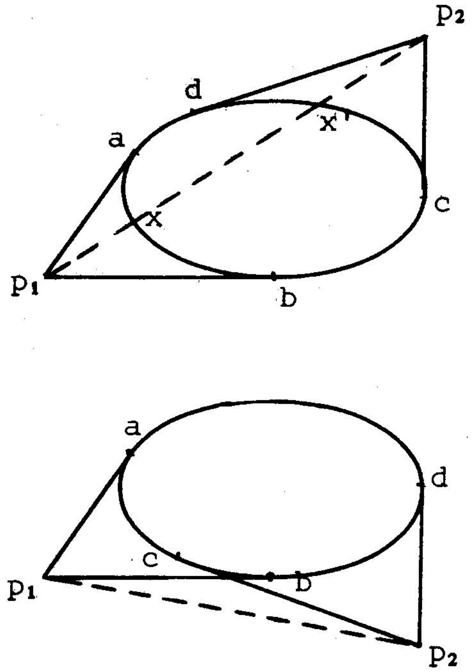
Een vast punt x=x' van π moet voldoen aan
$DV(y,z,y',x) = DV(y',z',y,x) = DV(y,x,y',z')$, dus wegens (8.6)
$DV(y,z,y',x)^2 = DV(y,z,y',x)DV(y,x,y',z') = DV(y,z,y',z') \neq 0$
Deze vergelijking in ξ bezit precies dan reële oplossingen als $DV(y,z,y',z') > 0$; we zien hieruit:

(18.6) Een involutie π van een reële projectieve rechte (of kegelsnede) is elliptisch (resp. hyperbolisch) als twee verschillende paren toegevoegde punten elkaar scheiden (resp. niet scheiden).

Ter aanvulling op (15.6) bewijzen we:

(18.7) Twee hyperbolische involuties van een reële projectieve rechte (of kegelsnede) bezitten een gemeenschappelijk paar toegevoegde punten dan en slechts dan als hun paren vaste punten elkaar niet scheiden.

Laten π_1,π_2 de involuties zijn, met vaste punten a,b resp. c,d. Het gezochte paar $x,x'=\pi_1 x=\pi_2 x$ ligt harmonisch met a,b en met c,d, is dus het paar vaste punten van de involutie die a met b en c met d



Figuur 48.

verwisselt.

Als vervanging van de orde willen we op een reële projectieve rechte of kegelsnede een "omloopszin" of <u>cyclische orde</u> invoeren, zoals we die aanschouwelijk kennen op een cirkel. Deze wordt vastgelegd door een 3-tal punten p_0, p_1, p_∞, waarmee we aangeven dat van de twee wegen van p_0 naar p_∞, gevormd door de twee delen waarin het paar p_0, p_∞ de rechte verdeelt, die over p_1 de positieve zin heeft, overeenstemmend met de orde van de projectieve coördinaat die resp. $0,1,\infty$ in p_0,p_1,p_∞ is. Een ander 3-tal q_0,q_1,q_∞ geeft dezelfde cyclische orde als op de delen, waarin p_∞,q_∞ de rechte verdeelt, de ordes van de bijbehorende projectieve coördinaten overeenstemmen; dit is het geval indien, als ξ_0, ξ_1, ξ_∞ de coördinaten van q_0,q_1,q_∞ t.o.v. de basispunten p_0,p_1,p_∞ zijn, $(\xi_1-\xi_0)(\xi_\infty-\xi_1)(\xi_0-\xi_\infty) < 0$ (aangenomen dat ξ_0, ξ_1, $\xi_\infty \neq \infty$). We willen dit nu coördinaatvrij beschrijven:
Een cyclische verwisseling (3-kring, even permutatie) behoudt de cyclische orde, een paarsverwisseling (transpositie, oneven permutatie) keert deze om. Zij π de projectiviteit met $\pi p_i = q_i$, $i \in \{0,1,\infty\}$; we bekijken eerst drie eenvoudige gevallen voor de gebroken lineaire transformatie, waardoor π in een projectieve coördinaat (niet noodzakelijk behorend bij de p_i) wordt gegeven:

(i) $\xi \mapsto \alpha\xi$ behoudt de orde als $\alpha > 0$, keert om als $\alpha < 0$;
(ii) $\xi \mapsto \xi+\beta$ behoudt de orde;
(iii) $\xi \mapsto \xi^{-1}$ keert de cyclische orde om (verwisselt 0 en ∞).

Iedere gebroken lineaire transformatie kan uit deze typen worden opgebouwd:

$$\frac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta} = -\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\gamma^2}\left(\xi+\frac{\delta}{\gamma}\right)^{-1} + \frac{\alpha}{\gamma} \quad \text{(als } \gamma \neq 0\text{), resp.}$$

$$= \frac{\alpha}{\delta}\,\xi+\frac{\beta}{\delta} \quad \text{(als } \gamma=0\text{).}$$

De 3-tallen bepalen dus dezelfde cyclische orde als $\alpha\delta-\beta\gamma > 0$, tegengestelde als $\alpha\delta-\beta\gamma < 0$. π wordt geïnduceerd door een lineaire transformatie A, die in de homo-

gene coördinaten waarvan deze projectieve coördinaat is afgeleid, gegeven wordt door de matrix $\begin{pmatrix}\delta & \gamma\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$. De determinant det A = $\alpha\delta-\beta\gamma$ hangt niet van de keuze van de coördinaat af; bij vervanging van A door een andere lineaire transformatie B, die dezelfde π induceert, is wegens (7.3) B=λA, dus det B = λ^2 det A.

(18.8) Definitie.

Zij de projectiviteit π van een reële projectieve rechte (of kegelsnede) in een projectieve coördinaat gegeven door $\xi \mapsto \frac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta}$, dan heet π + projectief als $\alpha\delta-\beta\gamma > 0$, en - projectief als $\alpha\delta-\beta\gamma < 0$.

In de projectieve groep GR van de reële projectieve rechte R vormen de - projectiviteiten een normale ondergroep GR^+ met index 2. Een + projectiviteit π is te schrijven als $\pi = \lceil A \rceil$ met det A = 1, A $\in SL_2(\mathbb{R})$, de speciale lineaire groep, kern van A $\to$ det A. Het homomorfisme $GL_2(\mathbb{R}) \to$ $\to GR \cong PGL_2(\mathbb{R}) = GL_2(\mathbb{R})/H(\mathbb{R}^2)$ beeldt dus $SL_2(\mathbb{R})$ af op $GR^+ \cong SL_2(\mathbb{R})/In$, waarin $In = \{I,-I\} = H(\mathbb{R}^2) \cap SL_2(\mathbb{R})$. Twee 3-tallen a,b,c en a',b',c' noemen we "gelijk-georiënteerd" indien $\pi a=a'$, $\pi b=b'$, $\pi c=c'$ onder een + projectiviteit π; dit is een equivalentierelatie voor 3-tallen punten van de reële projectieve rechte met 2 klassen. Iedere projectiviteit van deze rechte beeldt twee gelijk-geöriënteerde 3-tallen af op twee gelijk-geöriënteerde 3-tallen, dus voert een klasse over in een klasse: de + projectiviteiten behouden beide klassen, de - projectiviteiten verwisselen deze.

(18.9) Definitie.

Een cyclische orde op een reële projectieve rechte is een klasse van gelijk-geöriënteerde 3-tallen punten; deze rechte voorzien van een van beide cyclische ordes heet een geöriënteerde projectieve rechte.

Uit (18.6) zien we:

(18.10) Een elliptische involutie is + projectief; een hyperbolische involutie is - projectief.

Breid nu een reële projectieve rechte P uit tot de complexe projectieve rechte Z. Deze kunnen we na keuze van een projectieve coördinaat, die reëel is op P, aanschouwelijk voorstellen door het "complexe vlak", d.i. het euclidische vlak $\mathbb{R}^2$ waarin het punt $\ulcorner \xi_1, \xi_2 \urcorner$ het getal $\xi_1 + \xi_2\, i \in \mathbb{C}$ weergeeft, aangevuld met één oneigenlijk punt ∞.
De reële rechte P, die hierin zit als reële as $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, verdeelt Z in twee helften $Z_{>p}$ en $Z_{<p}$, die beantwoorden aan het boven- resp. beneden<u>halfvlak</u>, gevormd door de $\zeta \in \mathbb{C}$ waar $\operatorname{Im} \zeta > 0$ resp. $\operatorname{Im} \zeta < 0$. Oriënteren we P passend bij de gebruikte projectieve coördinaat, dan ligt $Z_{>p}$ <u>links</u> en $Z_{<p}$ <u>rechts</u>. Voor een andere projectieve coördinaat op P, die dezelfde cyclische orde geeft, zijn het linkerhalfvlak $Z_{>p}$ en het rechterhalfvlak $Z_{<p}$ dezelfde, zoals eenvoudig door narekenen blijkt; wat links resp. rechts ligt hangt alleen van de cyclische orde op P af, voor de tegengestelde cyclische orde zijn links en rechts verwisseld.

Laat een reële projectiviteit π van P op zichzelf (of op een andere complex uitgebreide reële rechte) gegeven zijn door $\xi \to \frac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta}$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Dan is

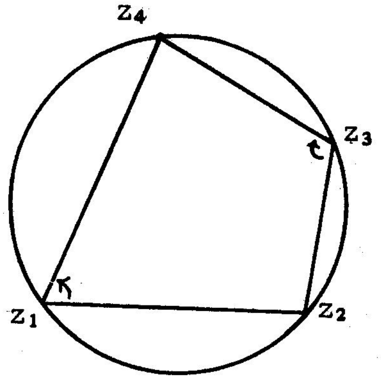
$\operatorname{Im} \frac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta} = \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{|\gamma\xi+\delta|^2} \operatorname{Im} \xi$ (als $\operatorname{Im} \xi \neq 0$ is $\gamma\xi+\delta \neq 0$), dus:

(18.11) <u>Een + projectiviteit van een reële rechte op zich beeldt (na complexe uitbreiding) elk halfvlak op zich af, een - projectiviteit verwisselt de halfvlakken.</u>
Een reële projectiviteit van een geöriënteerde projectieve rechte op een tweede geöriënteerde projectieve rechte, die de cyclische orde van de eerste overvoert in de cyclische orde van de tweede, beeldt het linker- resp. rechterhalfvlak van de eerste af op het linker- resp. rechterhalfvlak van de tweede.

De complexe affiene rechte, die overblijft als we uit Z het ene punt ∞ wegnemen, is tegelijk een euclidisch, dus een aequiform vlak. Laten de punten $z_1, \ldots, z_4$ coördinaten $\zeta_1, \ldots, \zeta_4 \in \mathbb{C}$ hebben.

$$DV(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{\zeta_4 - \zeta_1}{\zeta_2 - \zeta_1} : \frac{\zeta_4 - \zeta_3}{\zeta_2 - \zeta_3}$$

heeft als argument
$\measuredangle(z_1 \oplus z_2, z_1 \oplus z_4) - \measuredangle(z_3 \oplus z_2, z_3 \oplus z_4)$
(hierin staan $z_1 \oplus z_2, \ldots$ voor de halve rechte uit z_1 die z_2 bevat van het aequiforme vlak).
Liggen $z_1, \ldots, z_4$ op een cirkel van het aequiforme vlak, dan is



Figuur 49.

op grond van de bekende stelling voor de omtrekshoek $\angle(z_1 \oplus z_2, z_1 \oplus z_4) = \angle(z_3 \oplus z_2, z_3 \oplus z_4)$ (hoeken van hele rechten), dus wegens (17.13) het argument 0 of π, de DV is reëel; hetzelfde geldt als $z_1, \ldots, z_4$ op een rechte van het aequiforme vlak liggen. Ook het omgekeerde is waar:

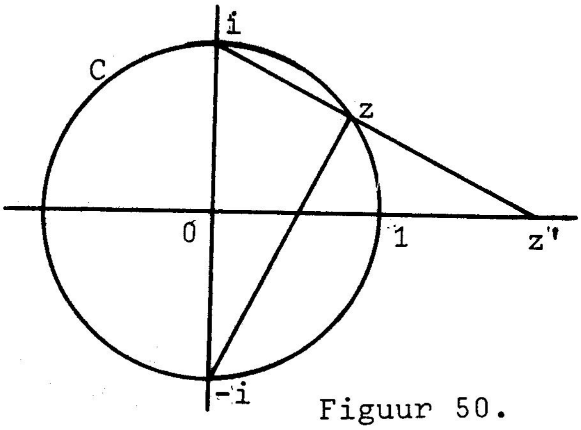
(18.12) Voor vier punten $z_1, \ldots, z_4$ van een complex uitgebreide reële projectieve rechte geldt:
$DV(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z_1, \ldots, z_4$ op één (reële) rechte of cirkel (is een van de punten ∞, dan de overige collineair).

De reële affiene rechten, alle aangevuld met hetzelfde punt ∞, vatten we op als cirkels door ∞ van Z. Alle "cirkels van Z" zijn die deelverzamelingen van Z, die de structuur van een reële projectieve rechte dragen, en waarvan de complexe uitbreiding Z is.
Door elk drietal punten van Z gaat precies één cirkel van Z.
Een complexe projectiviteit (gebroken lineaire transformatie) voert een cirkel van Z en een cirkel van Z over (8.8); iedere cirkel van Z kan zo in iedere andere cirkel van Z overgevoerd worden.

Van vier punten $z_1, \ldots, z_4$ op één cirkel C van Z kan ook de dubbelverhouding op C berekend worden:

(18.13) $DV_C(z_1, z_2, z_3, z_4) = DV(z_1, z_2, z_3, z_4)$

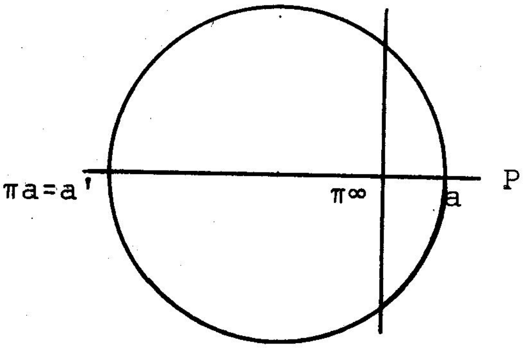
Als C niet door ∞ gaat, brengen we C met een affiene transformatie van Z over in de cirkel om 0 met straal 1; omdat



Figuur 50.

$\infty \mapsto \infty$ heeft deze de gedaante $\zeta \mapsto \alpha\zeta+\beta$, dus is ook een affiene transformatie van het aequiforme vlak: $\mathrm{Re}(\alpha\zeta+\beta) =$ $\mathrm{Re}\,\alpha\,\mathrm{Re}\,\zeta-\mathrm{Im}\,\alpha\,\mathrm{Im}\,\zeta+\mathrm{Re}\,\beta$, $\mathrm{Im}(\alpha\zeta+\beta) =$ $\mathrm{Im}\,\alpha\,\mathrm{Re}\,\zeta+\mathrm{Re}\,\alpha\,\mathrm{Im}\,\zeta+\mathrm{Im}\,\beta$; hierbij blijven beide dubbelverhoudingen behouden. Berekenen DV_C in de waaier met top i door deze te snijden met de reële as: $z \in C$ gaat over in $z' = \frac{z+i}{1+i} : \frac{z-i}{1-i}$; dit is gebroken lineair, dus $DV(z_1,z_2,z_3,z_4) = DV(z_1',z_2',z_3',z_4') =$ $DV_C(z_1,z_2,z_3,z_4)$.

Zij π een elliptische involutie van P. We gaan de vaste punten $p,\bar{p}$ van π opsporen in Z. Als $a \in P$, $\pi a=a'$, is $DV(p,a,\bar{p},a') = -1$, dus $p,\bar{p},a,a'$ liggen op een cirkel C van Z. De complexe conjugatie $z \mapsto \bar{z}$ is de spiegeling S_P van het aequiforme vlak; $S_PC = C$, dus $a+a'$ is een middellijn van C. Uit twee zulke cirkels vinden we $p,\bar{p}$ als de snijpunten (een van deze kunnen we door ∞ nemen).



Figuur 51.

Opgaven

18.1 Bewijs de stellingen van Ceva (18.2) (i), Menelaos (18.2) (ii) en Pasch (18.3)

18.2 Ga na dat "non [xmy]" een equivalentierelatie is op $A \setminus \{m\}$; laat zien dat deze twee klassen bezit. Noem deze halve rechten $A_{>m}, A_{<m}$, en overeenkomstig voor andere punten van A; ga na dat de betrekking

"$A_{>m} \subset A_{>n}$ of $A_{>m} \supset A_{>n}$" een equivalentierelatie is in de verzameling van alle halve rechten van A, met twee klassen, die beantwoorden aan de twee ordes op A.

18.3 Bewijs dat "scheiding" een symmetrische relatie van ongeordende paren is: uit [paqb] volgen [qapb], [pbqa], [qbpa], [apbq], [bpaq], [aqbp], [bqap].

18.4 Leid uit (18.5) af: een halve rechte uit een inwendig punt van een ellips snijdt deze in precies één punt.

18.5 Laten op een reële projectieve rechte de punten q_0, q_1, q_∞ coördinaten ξ_0, ξ_1, ξ_∞ hebben ten opzichte van p_0, p_1, p_∞. Ga na dat op de delen, waarin p_∞, q_∞ de rechte verdeelt de orde van de coördinaat ten opzichte van q_0, q_1, q_∞ overeenstemt met die ten opzichte van p_0, p_1, p_∞ indien $(\xi_1-\xi_0)(\xi_\infty-\xi_1)(\xi_0-\xi_\infty) < 0$ en geef een gedaante voor de voorwaarde ingeval een van de $\xi_i=\infty$.
Controleer hiermee het gedrag van projectiviteiten van de typen (i), (ii), (iii).

18.6 Zij een projectiviteit π van de reële projectieve rechte gegeven door $\pi p_i = q_i$, $i \in \{0,1,\infty\}$. Verifieer met behulp van (18.8): zijn de q_i een even resp. oneven permutatie van de p_i, dan is π + resp. - projectief.

18.7 Bewijs (18.10).

18.8 Laten de 3-tallen p_0, p_1, p_∞ en q_0, q_1, q_∞ op een reële projectieve rechte dezelfde cyclische orde geven; laat een punt x projectieve coördinaat ξ resp. ξ' hebben ten opzichte van de p_i resp. q_i. Reken na dat Im ξ en Im ξ' tegelijk positief zijn. (Druk ξ' uit in ξ en de coördinaten van de q_i ten opzichte van de p_i).

18.9 Bewijs $\Rightarrow$ in (18.12).

18.10 Zij π een elliptische involutie van de rechte P in het aequiforme vlak. Bewijs dat dit vlak twee reële punten p_1, p_2 bevat met de eigenschap: voor iedere punt a van P is πa het snijpunt van de cirkel door a, p_1, p_2 met P.

18.11 Een „cirkel van Z" C orienteren we met een reële projectieve coördinaat op C (18.12) of een 3-tal punten als in (18.9).
i) Ga na: de georienteerde cirkel C verdeelt Z in een linkerkant $Z_{>C}$ en een rechterkant $Z_{<C}$; een complexe projectiviteit π van Z voert C in een georienteerde cirkel πC van Z over, en de linker- resp. rechterkant van C in die van πC: $\pi Z_{>C} = Z_{>\pi C}$, $\pi Z_{<C} = Z_{<\pi C}$.
Twee (georienteerde) cirkels C en D <u>raken</u> als $|C \cap D| = 1$; we zeggen dat C en D „gericht raken" als bovendien de linkerkant van de één bevat is in die van de ander: $(Z_{>C} \subset Z_{>D}) \vee (Z_{>C} \supset Z_{>D})$.
ii) Toon aan dat „gericht raken" een equivalentie-relatie is in de verzameling van alle georienteerde cirkels door een gegeven punt, en dat elke klasse precies één georienteerde rechte (cirkel door ∞) bevat.
Zij π een projectiviteit van Z, waarvoor $\pi 0 = 0$ en πP gericht raakt in 0 aan P (georienteerde reële as $\mathbb{R}$).
iii) Bepaal de gedaante van π; toon aan dat π elke klasse gericht rakende cirkels door 0 als geheel vast laat (gebruik de draaiing $\zeta \mapsto \alpha\zeta$, $|\alpha| = 1$, die P in de georienteerde rechte van 0 naar α overvoert).

18.12 De <u>hoek</u> van twee georienteerde cirkels C en D van Z in één van hun snijpunten is per definitie de hoek van hun gerichte raaklijnen.
i) Ga na dat C en D in het andere snijpunt de tegengestelde hoek maken.
ii) Bewijs dat een projectiviteit π van Z deze hoek behoudt (onderzoek de typen $\zeta \mapsto \alpha\zeta$ met $|\alpha| = 1$ of $\alpha > 0$, $\zeta \mapsto \zeta+\beta$, $\zeta \mapsto \zeta^{-1}$).
Wegens deze eigenschap heet de cirkelmeetkunde van Z het <u>conforme vlak</u>.

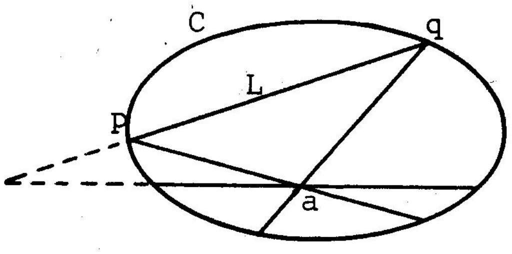
§19. Niet-euclidische meetkunde.

In het euclidische vlak is er bij een punt a en een rechte L niet door a, precies één rechte door a evenwijdig L. Dit kan niet bewezen worden uit de andere grondeigenschappen van het vlak, zoals: door twee verschillende punten gaat precies één rechte, twee verschillende rechten hebben ten hoogste één snijpunt; de mogelijkheid hoeken en afstanden te meten. Er bestaan namelijk vlakke meetkunden, waarin door a meer dan één, of geen, rechten gaan die L niet snijden, en die toch de andere eigenschappen van het euclidische vlak bezitten.

19.1 Definitie

Het hyperbolisch vlak heeft als punten de binnenpunten van een (niet lege) kegelsnede C in het reële projectieve vlak, en als rechten de binnen C gelegen delen van de projectieve rechten.

De punten op en buiten C behoren dus niet tot het hyperbolische vlak: L snijdt een rechte door a en een buitenpunt van L hyperbolisch niet! Zijn p,q de snijpunten van L met C, dan verdelen de rechten a+p en a+q de waaier van rechten door a in twee delen (beantwoordend aan de delen waarin p,q de projectieve rechte L volgens (18.5) verdelen), waarvan één bestaat uit de rechten die L hyperbolisch wèl en de ander uit degene die niet snijden. De grenslijnen a⊕p, a⊕q heten parallel met L, de overige niet L snijdende rechten noemt men hyper- of ultraparallel met L. Een punt van C heet een eind; C is a.h.w. de einder (horizon). Een hyperbolische rechte heeft 2 einden, een halve rechte 1 eind; hele of halve rechten zijn dus parallel als ze een eind gemeen hebben.



Figuur 52.

Voor de meting van hoeken in het hyperbolische vlak beschikken we niet over isotrope punten of richtingen; hun rol wordt overgenomen door de raakpunten van de raaklijnen uit het hoekpunt:

(19.2) Definitie

In een hyperbolisch vlak is de hoek van twee rechten A,B

$$\angle(A,B) = \frac{1}{2i} \log DV(I_1,A,I_2,B),$$

waarin I_1,I_2 de complex geconjugeerde raaklijnen uit $m = A \cap B$ aan C zijn; en de hoek van twee halve rechten $A_>$, $B_>$ uit met einden a,b

$$\measuredangle(A_>,B_>) = \frac{1}{i} \log DV(i_1,a,i_2,b)$$

waarin i_1 resp. i_2 de complex geconjugeerde raakpunten van I_1, resp. I_2 zijn.

Deze hoeken bezitten dezelfde eigenschappen als de in (16.11) en (17.12) gedefinieerde, zoals blijkt door het projectieve vlak aequiform te maken door i_1,i_2 als isotrope punten aan te wijzen waardoor C een cirkel met middelpunt m wordt.
De rechten A en B zijn loodrecht, $A \perp B$, als $DV(I_1,A,I_2,B) = -1$, d.w.z. $H(I_1,A,I_2,B)$, dus A en B toegevoegd bij de door C geinduceerde involutie in de waaier $\mathbf{m}$ (A en B gaan elk door de pool van de ander).

Een hyperbolische coördinaat op een hyperbolische rechte L is een projectieve coördinaat die $0,\infty$ is in de einden p,q van L en positief binnen C. Als afstand van twee hyperbolische punten $x,y|L$ met coördinaten ξ,η kan het verschil $\xi-\eta$ niet dienen, omdat dit geen additieve eigenschap bezit. Wel heeft het quotient $\frac{\eta}{\xi} = DV(p,x,q,y)$ een multiplicatieve eigenschap (8.6). Omdat p,q en x,y niet scheiden (18.5) is $DV(p,x,q,y) > 0$ (18.4); we krijgen de additieve eigenschap van de afstand door de logarithme te nemen.

(19.3) Definitie

In een hyperbolisch vlak is de afstand van twee punten x,y het

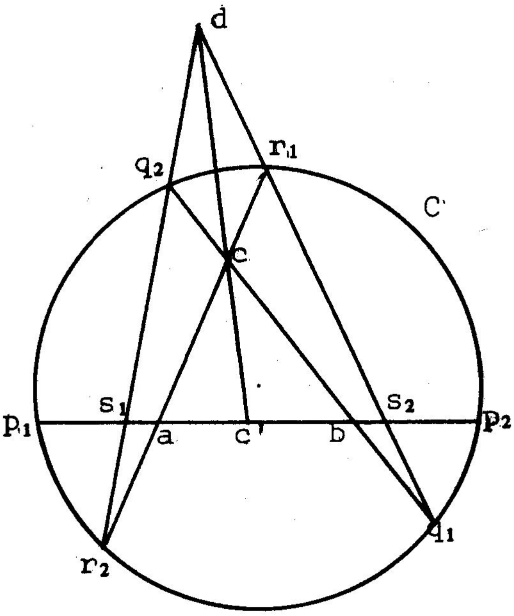
<u>reële getal</u>

$$|x\,y| = |\log DV(p,x,q,y)|,$$

<u>waarin</u> p,q <u>de einden van</u> $x \oplus y$ <u>zijn.</u>

Evident is $|xy| \geqslant 0$ en $|xy| = 0 \Longleftrightarrow x = y$; $|xy| = |yx|$. Verwisseling van p,q vervangt de dubbelverhouding door de inverse en heeft dus geen invloed. De einden zijn oneindig ver.

Een hyperbolische rechte geven we een <u>orde</u> door deze over te nemen van een hyperbolische coördinaat. Er zijn weer twee ordes op een rechte, met dezelfde „tussen" relatie, waarvan de eigenschappen overeenstemmen met de in (18.1) ingevoerde: maken we het projectieve vlak affien met een oneigenlijke rechte die C niet snijdt (zodat C een ellips wordt), dan stemmen op iedere rechte de ordes voor de hyperbolische punten (en einden) overeen met de affiene ordes op die rechte.



Figuur 53.

Nu gaan we de driehoeks ongelijkheid afleiden: Laten a,b,c niet-collineaire punten zijn. De einden van $a \oplus b$ noemen we p_1, p_2 en we ordenen $a \oplus b$ zó dat $p_1 < a < b < p_2$; analoog $q_1 < b < c < q_2$ en $r_1 < c < a < r_2$. Stel $d = (q_1 \oplus r_1) \cap (q_2 \oplus r_2)$; dit punt ligt buiten C (toegevoegd aan het binnenpunt c). Verder $c' = (a \oplus b) \cap (c \oplus d)$, $s_1 = (a \oplus b) \cap (q_2 \oplus r_2)$, $s_2 = (a \oplus b) \cap (q_1 \oplus r_1)$. Om de volgorde van deze punten op $a \oplus b$ te bepalen maken we het vlak affien zó dat C een ellips wordt. Dan volgt met (18.3) in driehoek c q_2 r_2: $[q_2\ c\ b]\ \&\ [c\ a\ r_2] \Rightarrow [q_2\ s_1\ r_2]\ \&\ [s_1\ a\ b]$, dus s_1 ligt binnen C en $p_1 < s_1 < a$.
Anderzijds is net zo $b < s_2 < p_2$.

Wegens $p_1 < a < b < p_2$ is $DV(p_1,a,p_2,b) > 1$; evenzo op $b \oplus c$ en $c \oplus a$:
$|bc|+|ca| = \log DV(q_1,b,q_2,c) + \log DV(r_1,c,r_2,a) =$
$\log DV(q_1,b,q_2,c)\, DV(r_1,c,r_2,a) =$ (perspectief uit d)
$\log DV(s_2,b,s_1,c')\, DV(s_2,c',s_1,a) =$
$\log DV(s_2,b,s_2,a) = \log DV(s_1,a,s_2,b) >$
$\log DV(p_1,a,p_2,b) = |ab|$.
De ongelijkheid is voor dubbelverhoudingen op een rechte eenvoudig na te rekenen.

(19.4) Het hyperbolische vlak is met de in (19.3) gedefinieerde metriek een metrische ruimte.

Verder is gebleken $|ab| = |bc|+|ca| \Rightarrow a,b,c$ collineair, dus ook hier geldt

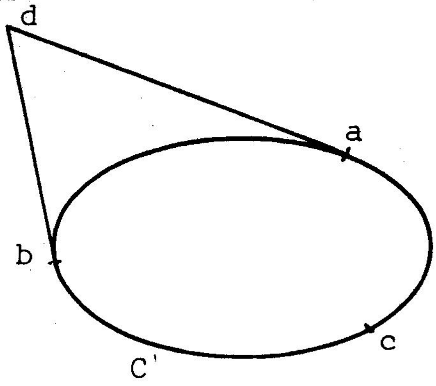
$$[x\ y\ z] \Longleftrightarrow |xy|+|yz| = |xz|.$$

Een hyperbolische gelijkvormigheid moet einden in einden, dus C op zichzelf afbeelden, en hoeken, dubbelverhoudingen op C, behouden, dus op C een projectiviteit induceren. Anderzijds is een collineatie van het hyperbolische vlak door het gedrag op C bepaald.

(19.5) Stelling

Iedere projectiviteit van een kegelsnede van een projectief vlak is restrictie van precies één projectiviteit van dit vlak.

Bewijs: Zij π een projectiviteit van de kegelsnede C. Laat $\pi a=a'$, $\pi b=b'$, $\pi c=c'$ zijn (hierdoor is π bepaald).
Zij d het snijpunt van de raaklijnen in a en b aan c, en d' net zo voor a',b'. De door $\pi' a=a'$,



Figuur 54.

$\pi'b=b'$, $\pi'c=c'$, $\pi'd=d'$ gedefinieerde projectiviteit van het vlak beeldt C op πC af en induceert daarbij π.
Vanzelf gaan bij π' binnenpunten van C in binnenpunten over.

Een gelijkvormigheid van het hyperbolische vlak is dus restrictie van een projectiviteit van het projectieve vlak, behoudt dubbelverhoudingen en dus hyperbolische afstanden, is een congruentie.

(19.6) Definitie

Een + resp.- congruentie van het hyperbolische vlak is de restrictie van een projectiviteit van het reële projectieve vlak die C op zichzelf afbeeldt door een + resp. - projectiviteit.

Alle hyperbolische congruenties vormen een groep, isomorf met de projectieve groep $G\mathbb{R}$ van de reële rechte $\mathbb{R}$; de + congruenties zijn hiervan een normale ondergroep $G\mathbb{R}^+$ met index 2.
De congruenties die het punt **m vast houden** vormen in de congruentie groep een ondergroep (de isotopiegroep van m), die isomorf is met de overeenkomstige groep in het aequiforme vlak $O_2(\mathbb{R})$ (de vlakke orthogonale groep), zoals weer blijkt door het projectieve vlak aequiform te maken met i_1,i_2 (complex geconjugeerde raakpunten uit m aan C) als isotrope punten.

Zij π een congruentie, $A_>$ en $B_>$ halve rechten uit m en i_1,i_2 weer de raakpunten uit m; evenzo j_1,j_2 uit πm.
Voor de vergelijking van hoeken uit verschillende punten leggen we vast dat, na keuze van een cyclische orde op C, steeds i_1 links, i_2 rechts zal zijn (dus ook j_1 links, j_2 rechts).
π voert het paar i_1,i_2 in het paar j_1,j_2 over; een + congruente behoudt de halfvlakken van de complex uitgebreide C (18.11) (C is op te vallen als projectieve rechte), dus $\pi i_1=j_1$, $\pi i_2=j_2$; is π-congruent, dan is $\pi i_1=j_2$, $\pi i_2=j_1$. Hieruit volgt op dezelfde wijze

als (17.14):

$$\measuredangle(\pi A_>, \pi B_>) = \pm\ \measuredangle(A_>, B_>) \text{ als } \pi \pm \text{ congruent.}$$

Zij a,b hyperbolische punten, en p,q de einder van a+b, dan zijn $\pi p, \pi q$ de einden van $\pi a + \pi b$. Omdat de afstand in (19.3) onafhankelijk van volgorde van de einden is, geldt zonder meer $|\pi a\ \pi b| = |ab|$.

Bij twee gegeven punten m,m' en halve rechten $A_>, A'_>$ uit resp. m' zijn er precies één + en één - congruentie waarvoor $\pi m = m'$, $\pi A_> = A'_>$: laten i_1, i_2 resp. j_1, j_2 weer de raakpunten uit m resp. m' zijn, en a resp. a' de einden van $A_>$ resp. $A'_>$; definieer π op C door $\pi i_1 = j_1$, $\pi i_2 = j_2$, $\pi a = a'$ of $\pi i_1 = j_2$, $\pi i_2 = j_1$, $\pi a = a'$.

Een involutorische congruentie π induceert een involutie op C, voortgebracht door een centrum p en as P (13.3). Is p binnen, dan is de involutie op C elliptisch, dus π + congruent (18.10), de <u>puntspiegeling</u> Sp in p; is p buiten, dan is π - congruent, de <u>spiegeling</u> Sp met spiegel P.

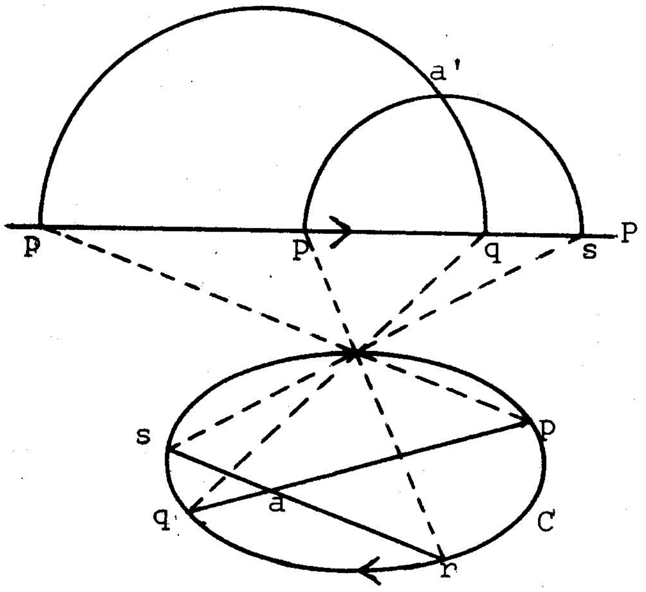
Bij twee verschillende punten a,a' zijn er één spiegeling Sp en één puntspiegeling Sp met Spa=a', Spa=a': laat a+a' einden r_1, r_2 hebben; er zijn p,q op a⊕a' zo dat H(p,a;q,a') èn $H(r_1,p,r_2,q)$ (18.7), laat p binnen en q buiten zijn; P is de poollijn van q.

Bij twee halve rechten $A_>, A'_>$ uit hetzelfde punt m is de - congruentie π waarvoor $\pi m = m'$, $\pi A_> = A'_>$ een spiegeling: de raakpunten uit m worden verwisseld, dus π is involutorisch.

Evenals in het aequiforme vlak geldt dat iedere congruentie product is van ten hoogste 3 spiegelingen. De classificatie (17.7) van typen congruenties blijft echter niet onaangetast: er komen meer typen doordat voor de onderlinge ligging van twee spiegels nu drie situaties te onderscheiden zijn.

Het in (19.1) gedefinieerde hyperbolische vlak hangt niet van de keuze van de kegelsnede C af, omdat deze door een projectieve π van het vlak in iedere andere C' kan worden overgevoerd (11.10), waarbij binnenpunten in binnenpunten overgaan. π behoudt de afstand (19.3) en ook de hoek (19.2) als onder π de orientatie van C aan die van C' beantwoordt.

Naast dit projectieve model is er het conforme model van het hyperbolische vlak, waarvan we nu de samenhang met (19.1) beschrijven. Identificeer C (perspectief) met reële projectieve rechte met orientatie P en vul deze complex aan tot Z. Een hyperbolisch punt a (binnenpunt van C) geeft één raakpunt a' in het linkerhalfvlak $Z_{>P}$ van P; alle punten van de rechte met einden p,q brengen op C een involutie te weeg, die p met q verwisselt, en vinden een plaats op de halve cirkel van Z met middellijn pq. De „rechten" van dit model zijn krommen. Het heet conform omdat de hoek nu euclidisch gemeten kan worden.



Figuur 55.

Het elliptische vlak krijgen we door in (19.1) C te vervangen door een kegelsnede zonder reële punten. Alle punten van het reële projectieve vlak zijn nu „binnen"; er zijn geen evenwijdige rechten. Afstand en hoek voeren we beter in met behulp van het schoofmodel: de „afstand" van twee elliptische punten (1-dimensionale lineaire deelruimten van $\mathbb{R}^3$) is hun euclidische hoek als rechten door 0

(in $\mathbb{R}^3$ met inproduct); de „hoek" van twee rechten (2-dimensionale lineaire deelruimten) is hun standhoek als vlakken door 0, d.i. de hoek van hun normalen. Elliptische congruenties zijn de door draaiïngen geïnduceerde projectiviteiten.

Opgaven

(19.1) In een hyperbolisch vlak geldt:

i) Twee rechten hebben hetzij één punt, hetzij één loodlijn, hetzij één eind gemeen (resp. snijdend, ultraparallel, parallel).

ii) Twee niet-parallele halve rechten bezitten een unieke gemeenschappelijke parallel.

iii) Twee loodrechte rechten snijden.

iv) Bij een punt, resp. een halve rechte en een rechte is er een unieke loodlijn op de rechte door het punt resp. evenwijdig aan de halve rechte.

(19.2) Worden twee rechten L,M van het hyperbolische vlak gesneden door een derde N, zodat $\angle(L,N) = \angle(M,N)$, dan zijn L en M ultraparallel (puntspiegel aan het midden van het lijnstuk met eindpunten $L \cap N$ en $M \cap N$).

(19.3) Een driehoek van het hyperbolische vlak heet 1-,2-, of 3-voudig asymptotisch als 1,2 resp. 3 paar zijden inplaats van een punt een eind gemeen hebben. Bewijs:

i) Twee 3-voudig asymptotische driehoeken zijn steeds congruent.

ii) Twee 2-voudig asymptotische driehoeken zijn precies dan congruent, als hun hoek (in het ene hyperbolische punt) dezelfde grootte heeft.

iii) Twee 1-voudig asymptotische driehoeken zijn precies dan congruent, als beide hoeken (in de twee hyperbolische punten van elke driehoek) in grootte overeenstemmen.

iv) Zij a een punt, L een rechte met einden p,q,$a \notin L$ en b snijpunt

van L met de loodlijn uit a op L. Dan is
$\angle(a+p,a+b) = \angle(a+b,a+q)$ (spiegel aan a+b);
dit heet de „hoek van parallelisme", deze is $< \frac{1}{2}\pi$.

(19.4) Neem aan dat in het hyperbolische vlak een (ongeorienteerde, positieve) oppervlakte van driehoeken kan worden ingevoerd, met de eigenschap dat de oppervlakte van een vereniging van niet-overlappende driehoeken de som van de oppervlakten van deze is, en die invariant is onder congruenties. Alle 3-voudig asymptotische driehoeken hebben dan dezelfde oppervlakte, stel deze π. Ga na:

i) De oppervlakte van een 2-voudig asymptotische driehoek met hoek $\pi-\phi$ is een functie $O(\phi)$ van het supplement ϕ van de hoek, waarvoor $0 < \phi < \pi$

ii) $O(\phi)+O(\pi-\phi) = \pi$. (Voeg twee driehoeken samen tot een 3-voudig asymptotische)

Als $\phi=0$ klapt de driehoek samen, dus moet $O(0) = 0$, $O(\pi) = \pi$.

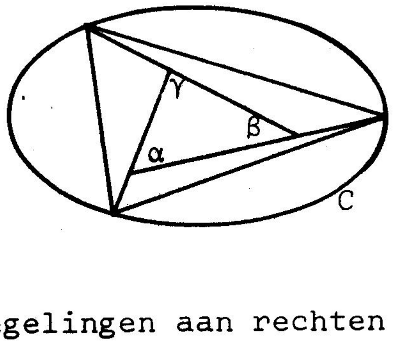
iii) $O(\phi)+O(\psi)+O(\pi-\phi-\psi) = \pi$, waar $0 < \phi$, $0 < \psi$, $\phi+\pi < \pi$.

iv) $O(\phi+\psi) = O(\phi)+O(\psi)$ (uit ii) en iii)).

Hieruit volgt $O(\frac{1}{n}\pi) = \frac{1}{n}\pi$, $O(\frac{m}{n}\pi) = \frac{m}{n}$ voor $m,n \in \mathbb{N}$; dus omdat O monotoon is $O(\phi) = \phi$.

v) Een (niet-asymptotische) driehoek met (positieve) hoeken α,β,γ heeft oppervlakte $\pi-(\alpha+\beta+\gamma)$, het angulair defect.

Dat een oppervlakte-functie met deze eigenschappen werkelijk bestaat is hiermee nog niet aangetoond; dit kan b.v. in het conforme model nagerekend worden.



(19.5) Onderzoek het product $S_P S_Q$ van twee spiegelingen aan rechten $P \neq Q$ van het hyperbolische vlak: Laat zien dat:

i) als P,Q snijden in een punt $m=P \cap Q$ is $S_P S_Q$ een draaiïng om m (gedraagt zich als een draaiïng in een aequiform vlak),

m is het enige vaste punt, er is reëel, geen vast eind en als $P \not\perp Q$ geen invariante rechte;

ii) $S_P S_Q = S_Q S_P \Leftrightarrow P \perp Q$, in dit geval is $S_P S_Q = S_m$ de <u>puntspiegeling</u> in m en zijn alle rechten door m invariant;

iii) als P,Q een gemeenschappelijke loodlijn R bezitten (ultraparallel zijn) is $S_P S_Q = S_m S_n$ product van de twee puntspiegelingen in $m = P \cap R$ en $n = Q \cap R$ en heet een <u>translatie</u> langs R; dit is de enige invariante rechte, de einden van R zijn beide vast, er zijn geen vaste punten;

iv) als P,Q een gemeenschappelijk eind t bezitten (parallel zijn) heet $S_P S_Q$ een <u>parallelverplaatsing</u>; deze heeft één vast eind t, geen vaste punten, geen invariante rechten.
Leid noodzakelijke en voldoende voorwaarden af opdat $S_P S_Q = S_{P'} S_{Q'}$ en bewijs hiermee de "<u>stelling van de 3 spiegelingen</u>":

v) $S_P S_Q S_R$ is spiegeling $\Leftrightarrow$ P,Q,R alle door één punt, of alle loodrecht op één rechte, of alle parallel.

(19.6) Classificeer de hyperbolische congruenties. Bekijk hiertoe hun gedrag op C:

i) Een -projectiviteit van een reële projectieve rechte bezit 2 reële vaste punten, dus een -congruentie π laat een rechte R vast; dan is $S_R \pi = T$ een translatie en $\pi = S_R T$ een <u>glijspiegeling</u> of $S_R \pi = I$ (identiteit), $\pi = S_R$ <u>spiegeling</u>;

ii) Stel de met (17.7) overeenkomende lijst op voor de 6 typen en onderscheid deze tevens naar aantal vaste einden.

(19.7) Beschouw het conforme model van het hyperbolische vlak in het linkerhalfvlak $Z_{>P}$ van de complex uitgebreide, geörienteerde reële projectieve rechte P. Verifieer:

i) Voor twee hyperbolische punten a,b, die gerepresenteerd worden door $a', b' \in Z_{>P}$ wordt de afstand gegeven door
$|ab| = 2|\log DV\,(p,a',q,b')|$
waarin p,q de einden op P van de halve cirkel door a',b' zijn (gebruik (16.7) voor DV (p,Re a',q,Re b'));

ii) Voor twee halve rechten $S_>, T_>$ met einden s,t, geïdentificeerd met punten van P, uit een hyperbolisch punt m, gerepresenteerd door $m' \in Z_{>P}$, is de hoek

$\sphericalangle(S_>, T_>) = \frac{1}{i} \log DV(m', s, \overline{m'}, t)$
juist de hoek in m' van de bijpassend gerichte cirkels, waar $S_>$ en $T_>$ op liggen (gebruik opgave 18.12; transformeer $m' \mapsto 0$, $\overline{m'} \mapsto \infty$, dan gaan $S_>, T_>$ over in rechten door 0 met dezelfde hoek en P in een cirkel met middelpunt 0; hierop is de hoek het argument van de DV).

iii) Een +congruentie wordt in dit model weergegeven door de bijbehorende +projectiviteit van C, overgebracht naar P en uitgebreid tot het bovenhalfvlak $Z_{>P}$.
Zij π een -congruentie; deze werkt als -projectiviteit op C, dus evenzo op P, en verwisselt de halfvlakken van Z. De bijbehorende <u>$\frac{1}{2}$projectiviteit</u> π', gedefinieerd door $\pi' z = \overline{\pi z}$, stemt op P met π overeen, behoudt de halfvlakken, en is de weergave van π in $Z_{>P}$.

(19.8) Bewijs dat een projectiviteit van het elliptische vlak, die loodrechte stand van rechten behoudt, geïnduceerd wordt door een draaiïng van $\mathbb{R}^3$ met inproduct (gebruik (7.1), herleid tot het geval dat $\ulcorner e_0 \urcorner$, $\ulcorner e_1 \urcorner$, $\ulcorner e_2 \urcorner$ vast zijn). Een collineatie met dezelfde eigenschap krijgen we door een orthogonale transformatie samen te stellen met een automorfisme van $\mathbb{R}$, dat we op elk van de coördinaten laten werken. Aangezien -zoals we uit opgave 9.7 weten- $\mathbb{R}$ geen automorfisme buiten de identiteit bezit, zijn alleen de projectiviteiten van belang).

(19.9) Inventariseer de elliptische congruenties:

i) Een involutorische congruentie is een spiegeling in een punt en een rechte, die orthogonaal zijn, d.w.z. pool-poollijn bij de door het inproduct gegeven polariteit;

ii) Iedere congruentie is product van twee spiegelingen; het product van 2 spiegelingen is weer spiegeling als de spiegels loodrecht zijn, en dan ook hun polen);

iii) Een product van 3 spiegelingen is precies dan weer een spiegeling als de spiegels concurrent en hun polen collineair zijn (het een impliceert het ander);

iv) Een product van 3 spiegelingen is precies dan de identiteit als de spiegels paarsgewijze orthogonaal zijn (en dan ook hun polen); de 3 punten vormen een <u>pooldriehoek</u>: elk punt is pool van de overstaande zijde.

§20. Axiomatiek.

De vlakke meetkunde is in het voorgaande ontwikkeld uit de lineaire algebra, met definitie (2.1) als beginpunt. Daarbij hebben we de grondbegrippen punt, rechte, incidentie wel een aanschouwelijke betekenis gegeven. De klassieke opbouw van de euclidische meetkunde gaat uit van deze grondbegrippen, waartussen de betrekkingen worden vastgelegd door aanschouwelijk evidente axioma's. In het volgende zullen we de gelijkwaardigheid van beide meetkundes aantonen door coördinaten in te voeren in een synthetisch opgezette vlakke meetkunde.

(20.1) Definitie.

Een projectief vlak $\mathcal{P}$ wordt gevormd door een verzameling punten, een verzameling rechten en een relatie, incidentie, tussen punten en rechten die de volgende axioma's vervult:

A. Twee verschillende punten zijn incident met precies één rechte.

A*. Twee verschillende rechten zijn incident met precies één punt.

B. Elke rechte is incident met tenminste drie punten.

C. Er zijn een rechte en een punt die niet incideren.

Als tevoren schrijven we punten a,b,..., rechten A,B,... incidentie $a|A$, verbindingslijn $a \oplus b$, snijpunt $A \cap B$. De termen collineair, concurrent, punt- of lijnperspectief (van driehoeken of -zijden), centrum, as, collineatie, (quasi)perspectiviteit, dilatatie, transvectie, projectiviteit, involutie, harmonische ligging, zijn in §§2-4 gedefinieerd in termen van incidentie en houden hier dezelfde betekenis. De resultaten van §§3,4 berusten geheel op de eigenschappen A-C, met uitzondering van de existentie van quasiperspectiviteiten (3.7), die volgt uit Desargues (2.2), die algebraisch bewezen is. Deze nemen we op onder de axioma's.

(20.2) Definitie.

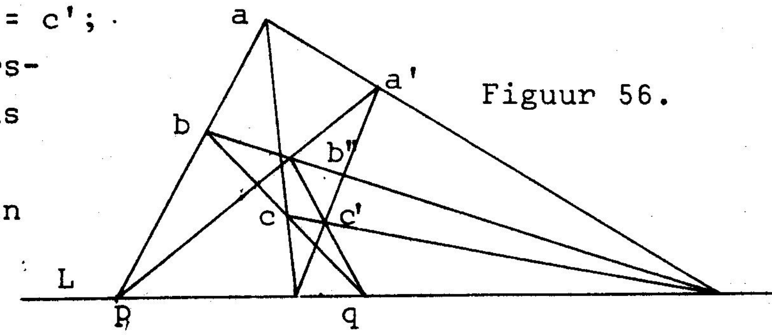
Een desargues'projectief vlak is een projectief vlak(20.1) waarin bovendien geldt

D. (DESARGUES). Twee puntperspectieve driehoeken zijn ook lijnperspectief.

In zo'n vlak geldt alles van §1; §2 behalve (2.1) en het bewijs van (2.2), en zonder opgave 2.1, 2.2, 2.4, 2.5; §3 zonder opgaven 3.4, 3.5; §4 zonder opgave 4,3.
A en A zijn duale uitspraken; uit B volgt het duale: ieder punt is incident met tenminste 3 rechten (opgave 1.4); C is zelfduaal; uit D volgt de duale (2.3). Dus geldt van elk gevolg van A-C of A-D ook het duale. In een projectief vlak geldt ook het dualiteitsbeginsel (6.3) en (6.4), (6.5) met opgaven 6.1, 6.2, 6.3. Verder is (7.2) alleen met (3.7), dus uit A-D bewezen.
In het vervolg zij $\mathcal{P}$ een deargues'projectief vlak.

(20.3) Stelling.
De transvecties van $\mathcal{P}$ met een gegeven as L vormen een commutatieve groep.

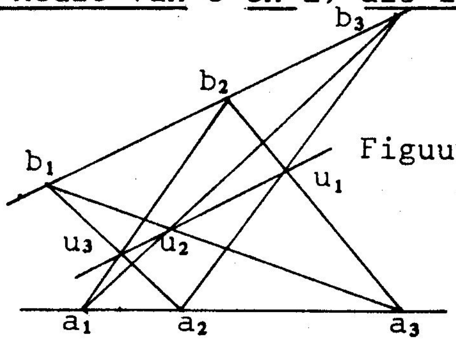
Bewijs: Laten ϕ,ψ transvecties zijn met centra $p|L$ resp. $q|L$. Zij $a \nmid L$, Veronderstel eerst $p \neq q$. Zij $a,a' \nmid L$, $a \neq a'$, $\phi a = b$, $\psi b = c$, $\phi a' = b'$, $\psi b' = c'$; dan zijn abc en a'b'c' puntperspectief uit een punt van L, dus lijnperspectief uit $p \oplus q = L$ (Desargues); $\psi\phi$ is weer een een transvectie met as L; in dit geval is $\psi\phi = \phi\psi$ evident.



Figuur 56.

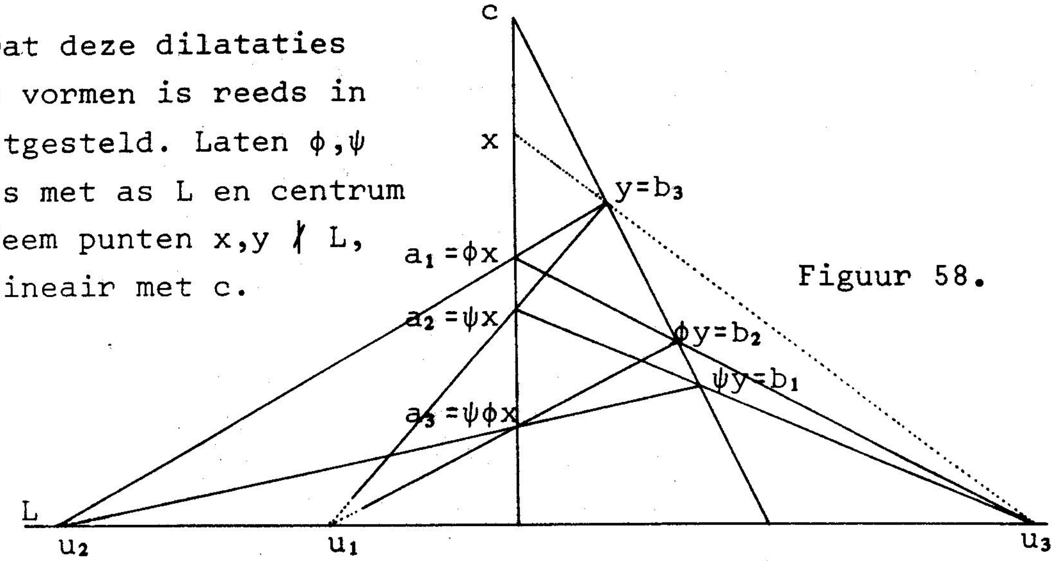
Veronderstel nu $p = q$, dan is $\psi\phi$ weer een transvectie met as L en centrum p. Zij ϕ' een transvectie met as L en centrum $p' \neq p$, dan is $\phi\phi$ weer een transvectie met as L en centrum $\neq p,p'$, zodat $\psi\phi\phi' = \phi\phi'\psi = \phi\psi\phi'$, dus $\phi\phi = \phi\psi$. De overige groepseigenschappen zijn eenvoudig te verifieren.

(20.4) Stelling.
De groep van de dilataties van $\mathcal{P}$ met gegeven as L en centrum $c \nmid L$ is precies dan commutatief (voor iedere keuze van c en L) als in $\mathcal{P}$ bovendien geldt
E. (PAPPUS-PASCAL).
Liggen a_1, a_2, a_3 op één rechte en b_1, b_2, b_3 op één rechte, dan zijn $u_1 = (a_2 \oplus b_3) \cap (a_3 \oplus b_2)$, $u_2 = (a_3 \oplus b_1) \cap (a_1 \oplus b_3)$, $u_3 = (a_2 \oplus b_3) \cap (a_3 \oplus b_1)$ collineair.



Figuur 57.

Bewijs: Dat deze dilataties een groep vormen is reeds in (3.8) vastgesteld. Laten ϕ, ψ dilataties met as L en centrum c zijn. Neem punten $x, y \not\in L$, niet collineair met c.



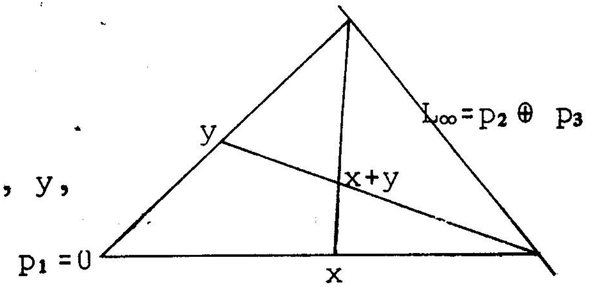
Figuur 58.

Pappus-Pascal voor $a_1 = \phi x$, $a_2 = \psi x$, $a_3 = \psi\phi x$, $b_1 = \psi y$, $b_2 = \phi y$, $b_3 = y$ zegt dat $y \oplus \psi x$ en $\phi y \oplus \phi\psi x$ snijden op L, dus $\phi\psi x = \psi\phi x$, de groep is commutatief.
Omgekeerd: als de groep commutatief is geldt Pappus-Pascal indien de rechten waarop $a_1, \ldots, b_3$ liggen door c gaan en de bemiddelende rechte $u_2 \oplus u_3 = L$ wordt. Dit is te bereiken met een projectiviteit (7.2).

In de algebraische opbouw hebben we (8.4) Pappus-Pascal afgeleid uit (8.3) de hoofdstelling, en daarmee de commutativiteit van het coördinatenlichaam gebruikt.

Om coördinaten in te voeren hebben we een bij het vlak passend lichaam K nodig.Dit zullen we contrueren in de meetkunde als een "getallenrechte", waarop de lichaamsbewerkingen overeenkomstig (9.3) en (9.4) tot stand komen door geschikte quasi-perspectiviteiten. We gaan daartoe over op het affiene vlak, dat gedefinieerd wordt als in (14.1).

Kies vier punten p_0, p_1, p_2, p_3 van $\mathcal{P}$ in algemene ligging. Noem $p_1 = 0$, $p_2 \oplus p_3 = L_\infty$; beschouw het affiene vlak $\mathcal{R} = \mathcal{P} \setminus L_\infty$, waarvan L_∞ de oneigenlijke rechte is.
In $\mathcal{R}$ definiëren we een optelling door de parallelogramwet: x+y is het vierde hoekpunt van het parallelogram met hoekpunten 0, x, y,



Figuur 59.

d.w.z. $0 \oplus x \parallel y \oplus (x+y)$, $0 \oplus y \parallel x \oplus (x+y)$; anders gezegd: zij T_y de eenduidig bepaalde translatie (transvectie met as L_∞) waarvoor $T_y 0 = y$, dan is

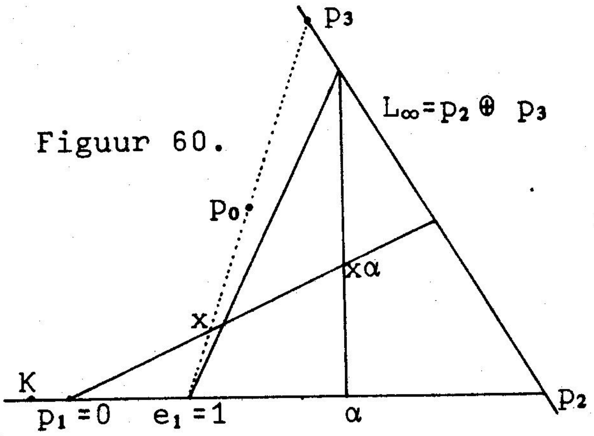
(20.5) $\quad x+y = T_y x.$

Uit $T_{x+y}0 = x+y = T_y x = T_y T_x 0$ blijkt met (20.3):

(20.6) $\mathfrak{R}$ is met de door (20.5) gedefinieerde optelling een additieve groep, isomorf met de commutatieve groep van de translaties.

$$T_{x+y} = T_y T_x = T_x T_y,$$
$$T_0 = I,\ T_x^{-1} = T_{-x}.$$

Wijs de affiene rechte $p_1 \oplus p_2$ aan als "getallenrechte" K, en $e_1 = (p_1 \oplus p_2) \cap (p_0 + p_3)$ als 1. Punten van K zullen we in hun rol van getallen grieks schrijven. Zij D_α de eenduidig bepaalde dilatatie met as L_∞ en centrum 0 waarvoor $D_\alpha 1 = \alpha$. De vermenigvuldiging van een punt van $\mathfrak{R}$ (vector) met een getal α van K (scalair) definiëren we



Figuur 60.

(20.7) $\quad x\alpha = D_\alpha x.$

Omdat nog niet vast staat dat vermenigvuldiging in K commutatief is, schrijven we scalairen rechts.

Uit $D_{\alpha\beta}1 = \alpha\beta = D_\beta \alpha = D_\beta D_\alpha 1$ blijkt:

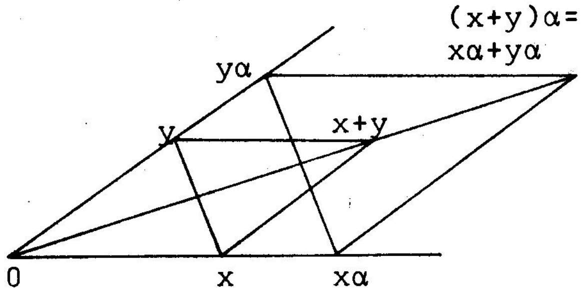
(20.8) K is met de door (20.7) gedefinieerde vermenigvuldiging beperkt tot K, een multiplicatieve groep, isomorf met de groep van de dilataties met gegeven, niet incident, as en centrum.

$$D_{\alpha\beta} = D_\beta D_\alpha,$$
$$D_1 = I,\ D_\alpha^{-1} = D_{\alpha^{-1}}.$$

De distributieve wetten gelden:

$$(x+y)\alpha = x\alpha + y\alpha.$$

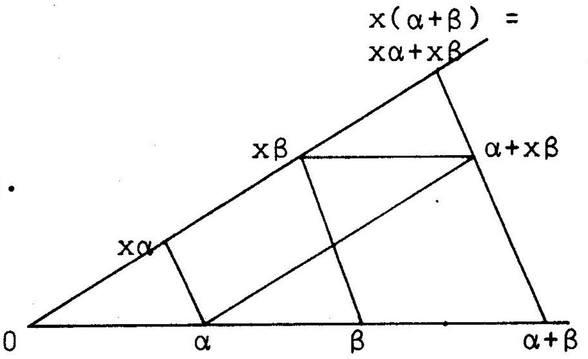
De driehoeken x y x+y en xα yα (x+y)α zijn lijnperspectief uit L_∞, dus puntperspectief uit 0.



Figuur 61.

$x(\alpha+\beta) = x\alpha+x\beta$.

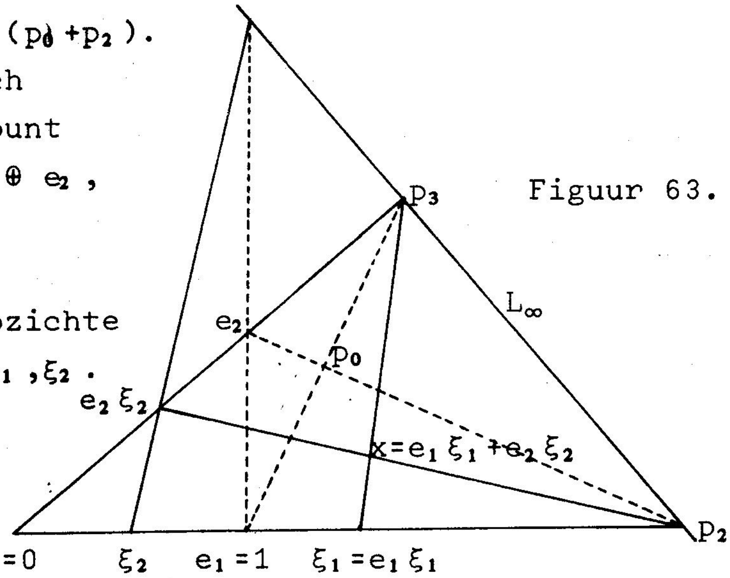
De rechten $(\alpha+x\beta) \oplus (\alpha+\beta)$ en $(\alpha+x\beta) \oplus (x\alpha+x\beta)$ zijn evenwijdig met $\beta \oplus x\beta$ resp. $\alpha \oplus x\alpha$, dus ook met $(\alpha+\beta) \oplus x(\alpha+\beta)$, d.w.z. ze vallen samen met deze.



Figuur 62.

(20.9) <u>K is met de door (20.5) en (20.7) gedefinieerde bewerkingen een (scheef) lichaam;</u>
<u>$\mathcal{R}$ is met deze bewerkingen een (rechts)-K-vectorruimte.</u>

Stel verder $e_2 = (p_1 \oplus p_3) \cap (p_0 + p_2)$. Ieder affien punt x laat zich eenduidig ontbinden in een punt $e_1\xi_1$ op $0 \oplus e_1$ en $e_2\xi_2$ op $0 \oplus e_2$, zodat $x = e_1\xi_1 + e_2\xi_2$.
Dus $\mathcal{R}$ heeft basis e_1, e_2, $\dim_K\mathcal{R} = 2$, en x heeft ten opzichte van deze basis coördinaten ξ_1, ξ_2.



Figuur 63.

De affiene rechte door 0 en een punt $a \neq 0$ bestaat uit alle $D_\alpha a$, $\alpha \in K$, is dus een 1-dimensionale lineaire deelruimte van $\mathcal{R}$. De hiermee evenwijdige rechte door het punt b bestaat uit alle $T_b D_\alpha a$, is dus de parallelvarieteit $\{a\alpha+b \mid \alpha \in K\}$. Zij $a = (\alpha_1, \alpha_2)$, $b = (\beta_1, \beta_2)$, en laat $x = (\xi_1, \xi_2) = a\alpha+b$, dan is

$$\left.\begin{array}{l}\xi_1 = \alpha_1\alpha + \beta_1 \\ \xi_2 = \alpha_2\alpha + \beta_2\end{array}\right\} \xrightarrow[\text{(als } \alpha_2 \neq 0)]{1^e - \alpha_1\alpha_2^{-1} \times 2^e} \xi_1 - \alpha_1\alpha_2^{-1}\xi_2 = \beta_1 - \alpha_1\alpha_2^{-1}\beta_2 .$$

De punten van een affiene rechte worden gegeven door 1 inhomogene lineaire vergelijking van de gedaante

$$\lambda_0 + \lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi = 0.$$

(20.10) Stelling.

Zij $\mathcal{P}$ een desargues' projectief vlak, synthetisch gedefinieerd volgens (20.2) door de geldigheid van A-E. Bij ieder 4-tal punten $p_0, \ldots, p_3$ in algemene ligging van $\mathcal{P}$ is er een eenduidig vastgelegde collineatie $\pi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}K^3$ op een volgens (2.1) algebraisch gedefinieerd projectief vlak over een (scheef) lichaam K, waarbij $\pi p_1 = \ulcorner 1,0,0 \urcorner$, $\pi p_2 = \ulcorner 0,1,0 \urcorner$, $\pi p_3 = \ulcorner 0,0,1 \urcorner$, $\pi p_0 = \ulcorner 1,1,1 \urcorner$. Het (scheef) lichaam K is door $\mathcal{P}$ op isomorfie na bepaald; het is commutatief (een "lichaam") als ook E (Pappus-Pascal) geldt; het heeft karakteristiek $\neq 2$ indien F. (FANO). De diagonaalpunten van een vierhoek zijn niet collineair.

Bewijs: Ga van $\mathcal{P}$ over op het affiene vlak $\mathcal{R}$, voer hierin coördinaten in op de boven aangegeven wijze. Neem voor π de coördinatisering $\mathcal{R} \to K^2$, die aan $x = e_1\xi_1 + e_2\xi_2$ toevoegt $\pi x = (\xi_1, \xi_2)$. Sluit $\mathcal{R}$ en K^2 projectief af tot $\mathcal{P}$ resp. $\mathcal{P}K^3$ en zet π voort tot collineatie $\mathcal{P} \to \mathcal{P}K^3$ Dan krijgen $p_0, \ldots, p_3$ de gewenste beelden. Een projectieve rechten van $\mathcal{P}K^3$ is een 2-dimensionale lineaire deelruimte, beschreven door een homogene lineaire vergelijking met coëfficienten links

$$\lambda_0\xi_0 + \lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 = 0.$$

Is $\pi' : \mathcal{P} \to \mathcal{P}K'^3$ een soortgelijke collineatie bij $p_0', \ldots, p_3'$, dan is $\pi'\pi^{-1} : \mathcal{P}K^3 \to \mathcal{P}K'^3$ een collineatie, dus K en K' isomorf volgens (9.5).

De verder uitspraken over K volgen uit (20.4) en (9.7).

Het axioma D (Desargues) zorgt voor de associativiteit van de vermenivuldiging in K (in onze opbouw via de existentie van dilataties). Daardoor kunnen we van inhomogene overgaan op homogene coördinaten, en wordt $\mathcal{P}$ isomorf $\mathcal{P}K^3$. Een gevolg is dat we $\mathcal{P}$ kunnen inbedden in een n-dimensionale projectieve ruimte $\mathcal{P}K^{n+1}$, door K^3 uit te breiden tot K^{n+1}. In een 3-dimensionale projectieve ruimte is de stelling van Desargues evident voor twee puntperspectieve driehoeken die in verschillende vlakken liggen; door projectie van deze ruimtelijke configuratie op op een vlak zien we dat D geldt voor ieder projectief vlak dat

aan A, A*, B voldoet en ingebed kan worden in een 3-dimensionale projectieve ruimte.

Opmerking.
Er zijn ook projectieve vlakken waarin D niet geldt, maar een zwakker axioma, b.v. de stelling van Desargues onder de beperkende voorwaarde dat het centrum met de as incideert. Daaruit volgt alleen de existentie van translaties; affien kunnen op de in (20.3), (20.5), (20.6) gevolgde wijze coördinaten ingevoerd worden, maar in dit geval is niet te bewijzen dat K een lichaam is: de associatieve wet is vervangen door de zwakkere alternatieve wet. Een voorbeeld van zo'n (niet-associatief) alternatief lichaam vormen de octaven, die uit de quaternionen worden verkregen op dezelfde wijze als deze uit de complexe getallen.

Aangezien ieder projectief vlak $\mathcal{P}K^3$ aan A-D, en afhankelijk van K ook E,F,G voldoet, is hiermee bewezen dat synthetische en algebraische projectieve vlakken gelijkwaardig zijn. Alle resultaten van §§1-14 gelden in beide.
Nu willen we ook het feit, dat de coördinaten reële getallen zijn, meetkundig karakteriseren. Daartoe voeren we eerst de orde axiomatisch in. Op een affiene rechte kan die beschreven worden met een tussen relatie als in (18.1), drie verschillende punten aanwijst welk tussen de beide andere ligt. We schrijven deze weer [x y z] en gaan uit van de volgende eigenschappen:

(20.11) $[x\ y\ z] \Rightarrow [z\ y\ x]$ & non $[y\ z\ x]$;

$[w\ x\ y]$ & $[w\ y\ z] \Rightarrow [x\ y\ z]$

voor elk 3-tal x,y,z geldt één van de relaties

$[x\ y\ z]$ of $[y\ z\ x]$ of $[z\ x\ y]$.

Een orde leggen we vast door voor één paar punten $a \neq b$ vast te stellen dat $a < b$; en te definiëren

(20.12) $x < y \Leftrightarrow [a\ b\ x]$ & $[b\ x\ y]$ of

$[a\ x\ b]$ & $[a\ x\ y]$ of

$[x\ y\ b]$ & $[a\ y\ b]$ of

$[x\ y\ a]$ & $[y\ a\ b]$.

De transitiviteit en trichotomie (§18, begin) kunnen hieruit afgeleid worden. Een tussenrelatie die (20.11) vervult geeft twee tegengestelde ordes.

Een parallelperspectiviteit tussen twee affiene rechten is een perspectiviteit met oneigenlijk centrum.

(20.13) Definitie.

Een geordend affien vlak is een affien vlak waarin geldt:
G affien. Op iedere rechte is een tussenrelatie gegeven die voldoet aan (20.11); parallelperspectiviteiten behouden de tussenrelatie.

Parallelperspectiviteiten voeren dus een orde in een orde over. Zij $\mathfrak{A}$ een geordend affien vlak met een coördinatisering $\pi : \mathfrak{A} \to K^2$ over een lichaam K, gerepresenteerd door een getallenrechte $0 \oplus 1$ in $\mathfrak{A}$.
Orden K zo dat $0 < 1$. Bij vaste $\alpha \in K$ zijn de optelling

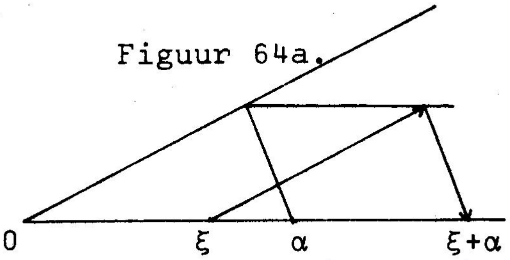
$$\xi \mapsto \xi + \alpha$$

en de linksvermenigvuldiging

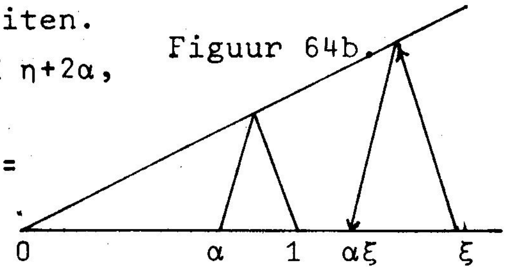
$$\xi \mapsto \alpha\xi$$

producten van parallelperspectiviteiten.

Figuur 64a.



Figuur 64b.



Als $\xi < \eta \Rightarrow \xi+\alpha > \eta+\alpha$, dan $\Rightarrow \xi+2\alpha < \eta+2\alpha$, dus de karakteristiek van $K \neq 2$ is, d.w.z. als F (Fano) geldt, zodat $\alpha = 2(\frac{1}{2}\alpha)$, behoudt optelling de orde.
Bij vermenigvuldiging geldt
$\xi < \eta \Rightarrow \alpha\xi < \alpha\eta$ resp. $\alpha\xi > \alpha\eta$ naargelang $\alpha > 0$ dan wel $\alpha < 0$ (kijk naar $\xi = 0$, $\eta = 1$).

Men verifieert nu makkelijk dat alle affiene transformaties de tussenrelatie behouden en een orde in een orde overvoeren.

(20.14) Het coördinatenlichaam van een geordend affien vlak, waarvoor A-D, F, G affien gelden, is een geordend lichaam.

Dit wil zeggen dat K een orde bezit waarvoor

$$\alpha > 0 \ \& \ \beta > 0 \Rightarrow \alpha+\beta > 0 \ \& \ \alpha\beta > 0.$$

Een geordend lichaam K heeft karakteristiek 0:
$1 < 0 \Rightarrow 1^2 > 0$, dus zeker is $1 > 0$; daaruit volgt $2.1 = 1+1 > 0$, en met inductie $n.1 > 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ (hierin is $1 \in K$). We identificeren verder $n.1$ met n, waardoor de rationale getallen $\mathbb{Q}$ een deellichaam van K worden (het priemlichaam), met overeenstemming van de orde.

Een gelijkwaardige projectieve formulering krijgen we met het begrip scheiding van twee paren p,q en x,y (18.4), dat we weer [p x q y] schrijven, met de eigenschappen

(20.15) [p x q y] $\Rightarrow$ [q x p y] & [x p y q] & non [p q x y];
[p x q z] & non [p y q z] $\Rightarrow$ [p x q y];
voor elk 4-tal p,x,y,z geldt één van de relaties
[p x y z] of [p y z x] of [p z x y].

(20.16) Definitie.
Een projectief vlak heet geordend indien geldt:
G. Op iedere rechte is een scheidingsrelatie gegeven die voldoet aan (20.15); perspectiviteiten behouden scheiding.

Op een euclididsche rechte zien we dat een willekeurig lijnstuk, voldoende vaak bij zichzelf opgeteld, elk ander lijnstuk zal overtreffen.

(20.17) Definitie.
Een archimedisch vlak is een geordend affien vlak waarin geldt:
G_A (ARCHIMEDES). Voor iedere translatie T en ieder paar punten x,y op een onder T invariante lijn $x \oplus y$ is er een geheel getal n zodat $[x\ y\ T^n x]$.

Zij $\mathcal{R}$ een archimedisch vlak, met een coördinatisering $\pi : \mathcal{R} \to K^2$ over een geordend lichaam K. Voor iedere $\xi,\eta \in K$, is $n\xi =$
$= T_\xi^n 0 > n$ voor zekere $n \in \mathbb{Z}$. Neem een $\alpha \in K$; bij iedere $m \in \mathbb{N}$ zijn er $n \in \mathbb{Z}$ waarvoor $n > m\alpha$;

daaronder is ook een kleinste n; voor deze is $n-1 \leqslant m\alpha < n$, dus $\frac{n-1}{m} \leqslant \alpha < \frac{n}{m}$. De verzameling $S(\alpha) = \{r \in \mathbb{Q} | r \leqslant \alpha\}$ bezit de eigenschappen $S(\alpha) \neq \emptyset$, $\mathbb{Q}$ en $s < t \in S(\alpha) \Rightarrow s \in S(\alpha)$; stel $\sigma(\alpha) = \sup S(\alpha) \in \mathbb{R}$, dan is $S(\alpha) = \{r \in \mathbb{Q} | r \leqslant \sigma(\alpha)\}$ (het paar verzamelingen $S(\alpha)$, $\mathbb{Q} \setminus S(\alpha)$ is een "snede van Dedekind).
De afbeelding $\sigma : K \to \mathbb{R}$ is monomorf ("1-1 homomorfisme in"): als $\alpha < \beta$ is er een $m \in \mathbb{N}$ waarvoor $m > (\beta-\alpha)^{-}$, $\frac{1}{m} < \beta-\alpha$; bij die $n \in \mathbb{Z}$ waarvoor $\frac{n-1}{m} \leqslant \alpha < \frac{n}{m}$ is dan $\frac{n}{m} < \beta$, dus $S(\alpha) \neq S(\beta)$, $\sigma(\alpha) < \sigma(\beta)$; verder is $\sigma(\alpha) + \sigma(\beta) = \sigma(\alpha+\beta)$ en $\sigma(\alpha)\sigma(\beta) = \sigma(\alpha\beta)$ rechtstreeks te verifieren. Dus K is isomorf met een deellichaam van $\mathbb{R}$, derhalve ook commutatief.

Een reëel affien vlak kan gekarakteriseerd worden als een archimedisch vlak met de eigenschap:
G_D (DEDEKIND). Voor iedere verdeling van alle punten van een rechte in twee niet-lege klassen zo dat geen punt van een klasse ligt tussen twee punten van de andere klasse, is er een punt in één van de klassen, dat ligt tussen elk ander punt van die klasse en elk punt van de andere klasse.

Bekijk de getallenrechte K; wegens G_A is $K \subset \mathbb{R}$. Neem een $\rho \in \mathbb{R}$ en definieer een snede in K:
$K_{\leqslant\rho} = \{\xi \in K | \xi \leqslant \rho\}$, $K_{>\rho} = \{\xi \in K | \xi > \rho\}$,
deze voldoen aan de veronderstellingen in G_D. Er is dus een $\alpha \in K$ waarvoor $\xi \in K_{\leqslant\rho} \Rightarrow \xi \leqslant \alpha$ en $\xi \in K_{>\rho} \Rightarrow \xi \geqslant \alpha$. Als $\alpha \neq \rho$ ligt tussen α en ρ een getal uit Q, dus uit K; dus moet $\alpha = \rho$. Hiermee is bewezen $K = \mathbb{R}$.

Voor de in het reële vlak bedreven meetkunde, speciaal de uit (15.4) afgeleide beweringen zoals (15.5) of (18.5) is voldoende dat in K ieder positief getal een kwadraat is. Meetkundig wordt dit uitgedrukt door de in (18.6) beschreven eigenschap:
H. Iedere involutie van een projectieve rechte, waarvoor twee verschillende paren toegevoegde punten elkaar niet scheiden, bezit vaste punten (is hyperbolisch).

(20.18) Definitie.
Een "reëel" projectief vlak is een projectief vlak waarin A-D, F, G, G_A (voor een afgeleid affien vlak), H gelden.

Vanzelf is dan ook E vervuld. In zo'n vlak gelden alle resultaten van §18. Axiomatische invoering van hoek en afstand gebeurt op de in §17 aangegeven wijze:

(20.19) Definitie.
Een aequiform vlak is een "reëel" affien vlak met een gegeven involutie zonder vaste punten (elliptisch) op de oneigenlijke rechte.

Dit is (16.1). In dit vlak kunnen we hoeken meten volgens (16.11) en (17.13), en afstanden volgens (17.8). Deze moeten echter nog geijkt worden:

(20.20) Definitie.
Een euclidisch vlak is een aequiform vlak waarin door een puntenpaar 0,e met $|0e| = 1$ een afstand vastgelegd is.

Dit is (17.11); zoals daar aangetoond is dit vlak isometrisch met K^2 met inproduct $(x|y) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2$.

Aanhangsel:

Halflineaire algebra.

1. Zij R een K-vectorruimte. Alle lineaire vormen op R, dat zijn de lineaire afbeeldingen $R \to K$, vormen weer een K-vectorruimte, de duale R^* van R. We schrijven de werking van $u \in R^*$ op $x \in R$ als een bilineaire paring, die aan het paar $\ulcorner u,x \urcorner \in R^* \times R$ toevoegt

(1) $\quad < u|x > = u(x) \in K.$

In deze inproduct-achtige notatie krijgen de lineariteit van u en de vectoroptelling en vermenigvuldiging met scalairen in R^* de vorm

(2) $\quad < u|x+y > = < u|x > + < u|y >,$

$\quad < u|\alpha x > = < u|x > \alpha,$ voor alle

$x,y \in R,$

(3) $\quad < u+v|x > = < u|x > + < v|x >,$ $\quad u,v \in R^*,$

$\quad < \lambda u|x > = \lambda < u|x >,$ $\quad \alpha,\lambda \in K.$

In plaats van $(x|x) = 0 \Rightarrow x = 0$ in een inproductruimte werken we nu met

(4) $\quad u = 0 \Leftrightarrow < u|x > = 0$ voor alle $x \in R,$

(5) $\quad x = 0 \Leftrightarrow < u|x > = 0$ voor alle $u \in R^*.$

Het eerste is de definitie van $u = 0$. Het laatste zien we als volgt:

Neem een basis $e_1,\ldots,e_n$ van R (gemakshalve eindig; dit is hiervoor niet nodig: iedere vectorruimte R bezit een Hamel-basis, die niet eindig of aftelbaar behoeft te zijn, zodat iedere $x \in R$ op precies één manier te schrijven is als eindige lineaire combinatie). Definieer $e_i^* \in R^*$ door

(6) $$< e_i^*|e_j > = \begin{cases} 1 & \text{als } i = j \\ 0 & \text{als } i \neq j. \end{cases}$$

Voor $x = \sum_j \xi_j e_j$ is dan $< e_i^*|x > = \xi_i$. Dus uit $< u|x > = 0$ voor alle $u \in R^*$ volgt alle $\xi_i = 0$, zodat $x = 0$. Omgekeerd triviaal.

Een $x \in R$ verschaft ons een lineaire vorm $\hat{x} \in R^{**}$, de lineaire afbeelding $R^* \to K$ gedefinieerd door

(7) $\hat{x} : u \mapsto \langle u|x \rangle$ voor $u \in R^*$.

De afbeelding $x \mapsto \hat{x}$ van R in R^{**} is volgens (2) lineair, en injectief omdat uit (5) blijkt:
$\hat{x} = 0 \Leftrightarrow \langle u|x \rangle = 0$ voor alle $u \in R^* \Rightarrow x = 0$.
We kunnen daarom R beschouwen als lineaire deelruimte van R^{**}.

2. Veronderstel nu $\dim R = n < \infty$, en $e_1,\dots,e_n$ een basis van R. Dan vormen de in (6) ingevoerde $e_1^*,\dots,e_n^*$ de "gecorrelleerde" basis van R^*: voor een willekeurige $u \in R^*$ is
$\langle u|x \rangle = \langle u|\sum_j \xi_j e_j \rangle = \sum_j \langle u|e_j \rangle \xi_j = \sum_j \langle u|e_j \rangle \langle e_j^*|x\rangle$,
dus de e_i^* brengen R voort.

(8) $u = \sum_i \langle u|e_i \rangle e_i^*$.

Uit $\sum_i \lambda_i e_i^* = 0$ volgt dat alle $\lambda_j = \langle \sum_i \lambda_i e_i^*|e_j \rangle = 0$, dus de e_i^* zijn onafhankelijk.
Hieruit volgt dat ook $\dim R^* = n$, en daaruit weer dat $\dim R^{**} = n$, zodat we R^{**} met R kunnen identificeren.

(9) $\dim R = n < \infty \Rightarrow \dim R^* = n,$
$R^{**} = R.$

Er heerst nu volledige symmetrie tussen R en R^*, die elkaars duale zijn. De <u>duale</u> bases $e_1,\dots,e_n$ en $e_1^*,\dots,e_n^*$ zijn elkaars gecorrelleerde.
In R voeren we coördinaten in ten opzichte van de basis $e_1,\dots,e_n$ door de lineaire bijectie $R \to K^n$, die e_i op de i^e 1-vector $\ulcorner 0,\dots,0,1,0,\dots,0 \urcorner$ (1 op plaats i, andere 0) afbeeldt; we schrijven x in K^n ook als "kolomvector" ($n \times 1$-matrix)

(10) $x = \sum_j \xi_j e_j \mapsto \ulcorner \xi_1,\dots,\xi_n \urcorner = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \in K^n$.

De werking van $u = \sum \lambda_i e_i^* \in R^*$ op x wordt dan verkregen door matrixvermenigvuldiging met de "rijvector" ($1 \times n$-matrix) $(\lambda_1 \dots \lambda_n)$.

(11) $\langle u|x \rangle = \langle \sum_i \lambda_i e_i^* | \sum_j \xi_j e_j \rangle = \sum_i \lambda_i \xi_i = (\lambda_1 \dots \lambda_n) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$

Het ligt nu voor de hand in R^* de coördinaten te schrijven als rijvector:

$$(12) \qquad u = \sum_i \lambda_i e_i^* \mapsto \llcorner \lambda_1, \ldots, \lambda_n \lrcorner = (\lambda_1 \ldots \lambda_n) \in {}^nK.$$

Als onderscheid schrijven we $\llcorner \ldots \lrcorner$ in ${}^nK = K^{n*}$.

De spiegelbeeld-symmetrie tussen R en R^*, K^n en ${}^nK$ komt ook in schrijfwijze tot uiting als we de scalairen aan tegengestelde kanten van de vectoren schrijven: in R^* en ${}^nK$ links, in R en K^n rechts. De met (8) symmetrische formule wordt dan

$$(13) \qquad x = \sum_j e_j < e_j^* | x >.$$

Opmerking 1.
In het geval van een niet-commutatief lichaam K is dit onderscheid tussen de rechts-K-vectorruimten R en K^n en links-K-vectorruimten R^* en ${}^nK$ ook noodzakelijk. Als K commutatief is zijn K^n en ${}^nK$ isomorf, maar de isomorfie tussen R en R^* die tot stand komt door $e_i \leftrightarrow e_i^*$ hangt van de keuze van de basis af, in tegenstelling tot de identificatie van R met R^*, die canoniek is.

Opmerking 2.
Bij een oneindig-dimensionale K-vectorruimte R is R^{**} wezenlijk groter dan R. Neem voor R de oneindige rijen $x = \ulcorner \xi_1, \xi_2, \ldots \urcorner$ met bijna alle $\xi_i = 0$, d.w.z. slechts een eindig aantal $\xi_i \neq 0$; deze heeft een aftelbare basis $e_1, e_2, \ldots$ bestaande uit de 1-vectoren $e_i = \ulcorner 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots \urcorner$ (1 op plaats i, andere 0). Nu bestaat R^* uit alle oneindige rijen $u = \llcorner \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lrcorner$ (zonder beperking, $\lambda_i = < u | e_i >$), zodat de $e_i^* = \llcorner 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots \lrcorner$, $i = 1, 2, \ldots$ niet voldoende zijn om R^* voort te brengen. Een $x \in R$ levert een $\hat{x} \in R^{**}$ waarvoor $\hat{x}(e_i^*) = < e_i^* | x > = \xi_i = 0$ voor bijna alle e_i^*, terwijl voor een willekeurige $z \in R^{**}$ de waarden op een basis van R^* willekeurig voorgeschreven mogen worden.

3. De "annihilator" van een lineaire deelruimte $X \subset R$ resp. $U \subset R^*$ is de lineaire deelruimte

(14) $X^{\perp} = \{u \in R^* \mid \langle u|x \rangle = 0$ voor alle $x \in X\} \subset R^*$,
$U^{\perp} = \{x \in R \mid \langle u|x \rangle = 0$ voor alle $u \in U\} \subset R$.

In deze schrijfwijze luidt (4): $R^{\perp} = O$ en (5): $R^{*\perp} = O$.
Duidelijk is $X \subset X^{\perp\perp}$, $X \subset Y \Rightarrow X^{\perp} \supset Y^{\perp}$.

Laat $e_1,\ldots,e_n$ een eindige basis van R zijn, die een basis $e_1,\ldots,e_p$ van X bevat. Dan is $e^*_{p+1},\ldots,e^*_n$ een basis van $X^{\perp}$, dus $\dim X^{\perp} = n-p$, en dan weer $\dim X^{\perp\perp} = p$.

(15) $\dim R = n < \infty \Rightarrow \dim X + \dim X^{\perp} = n$,
$X^{\perp\perp} = X$,
$X \subset Y \Leftrightarrow X^{\perp} \supset Y^{\perp}$.

Hieruit volgen verdere orthoplement-achtige eigenschappen:

(16) $(X + Y)^{\perp} = X^{\perp} \cap Y^{\perp}$,
$(X \cap Y)^{\perp} = X^{\perp} + Y^{\perp}$.

Het bewijs van het bovenstaande wordt aan de lezer overgelaten.

4. Zij $A : R \to S$ een lineaire afbeelding van K-vectorruimten R,S. Een lineaire vorm $v : S \to K$ wordt door samenstellen met A een lineaire vorm $v \circ A : R \to K$. Zo krijgen we een lineaire afbeelding $A^* : S^* \to R^*$ van de duale ruimten (in tegengestelde richting), de "getransponeerde" of "duale" van A:

(17) $A^*v = v \circ A$ voor $v \in S^*$, d.w.z.
$\langle A^*v|x \rangle = \langle v|Ax \rangle$ voor alle $x \in R$.

Bij compositie $R \xrightarrow{A} S \xrightarrow{B} T$ en $T^* \xrightarrow{B^*} S^* \xrightarrow{A^*} R^*$ geldt

(18) $A^* \circ B^* = (B \circ A)^*$.

Speciaal als A een inverse A^{-1} bezit volgt uit
$A^* \circ (A^{-1})^* = (A^{-1} \circ A)^* = I^*_R = I_{R^*}$ (identiteit van R^*) , en
$(A^{-1})^* \circ A^* = (A \circ A^{-1})^* = I^*_S = I_{S^*}$, dat

(19) $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Voor eindig-dimensionale ruimten, waar $R = R^{**}$ en $S = S^{**}$, blijkt uit de symmetrie in (17), dat A en A elkaars duale zijn.

(20) $\dim R = n < \infty \Rightarrow A^{**} = A.$

Laat A op basis $e_1, \ldots, e_n$ van R en $f_1, \ldots, f_m$ van S de $m \times n$-matrix (α_{ij}) hebben; d.w.z. $Ae_j = \sum_{i=1}^{m} f_i \alpha_{ij} \in S$ met coördinaten de j^e kolom $\alpha_{1j}, \ldots, \alpha_{mj}$. Volgens (13) is $\alpha_{ij} = \langle f_i^* | Ae_j \rangle =$ $= \langle A^* f_i | e_j \rangle$, dus volgens (8) wordt $A^* f_i = \sum \alpha_{ij} e_j^* \in R$, met coördinaten de i^e rij $\llcorner \alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in} \lrcorner$ van dezelfde matrix (α_{ij}). Voor $x = \ulcorner \xi_1, \ldots, \xi_n \urcorner$, $v = \llcorner \mu_1, \ldots, \mu_m \lrcorner$ blijkt uit

(21) $\langle v | Ax \rangle = (\mu_1 \ldots \mu_m)(\alpha_{ij}) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \langle A^* v | x \rangle$

dat A^*v in coördinaten als rijvector verkregen wordt door de $m \times n$-matrix (α_{ij}) van rechts op $(\mu_1 \ldots \mu_m) \in {}^mK$ te laten werken.

Schrijven we (als K commutatief is) ook K^{n*} met kolomvectoren, dan krijgt A^* de gespiegelde $n \times m$-matrix $(\alpha_{ij})^t$ met α_{ij} in de j^e rij en i^e kolom, die gewoon van links op de kolomvector werkt:

(22) $A = (\alpha_{ij}) \Leftrightarrow A^* = (\alpha_{ij})^t.$

<u>Opmerking 3</u>.
Het ware wijzer lineaire afbeeldingen tussen links-vectorruimten rechts van de vectoren te schrijven, zodat scalairen en afbeeldingen aan verschillende kanten staan. Dit hetstelt de spiegelbeeld-symmetrie in de formules:

links	rechts
$\lambda(vA^*) = (\lambda v)A^*$	$A(x\alpha) = (Ax)\alpha$

$\langle vA^* | x \rangle = \langle x | Ax \rangle$

$R^* \xleftarrow{\quad} T^* : B^*A^*$ (via $R^* \xleftarrow{A^*} S^* \xleftarrow{B^*} T^*$) $\qquad B^*A^* = (BA)^* \qquad BA : R \xrightarrow{\quad} T$ (via $R \xrightarrow{A} S \xrightarrow{B} T$)

${}^nK \xleftarrow{\quad} {}^mK : (\alpha_{ij}) = A^* \Leftrightarrow A = (\alpha_{ij}) : K^n \xrightarrow{\quad} K^m$

5. Beschouw een K-vectorruimte R en een L-vectorruimte S over verschillende lichamen K,L. Een lineaire afbeelding tussen R en S is niet mogelijk. We moeten ook een afbeelding tussen K en L inschakelen.

Een <u>isomorfisme</u> $\sigma : K \to L$ is een bijectie, waarvoor

(23) $$\begin{aligned}\sigma(\lambda+\mu) &= \sigma(\lambda) + \sigma(\mu)\\ \sigma(\lambda\mu) &= \sigma(\lambda)\sigma(\mu)\end{aligned} \quad \text{voor alle } \lambda,\mu \in K,$$

dus σ is zowel isomorfisme van de optelgroepen $K^+ \to L^+$ als van de vermenigvuldigingsgroepen $K^\times \to L^\times$; derhalve is $\sigma(0) = 0$, $\sigma(-\lambda) = -\sigma(\lambda)$, $\sigma(1) = 1$, $\sigma(\lambda^{-1}) = \sigma(\lambda)^{-1}$ voor $\lambda \neq 0$, en σ^{-1} weer isomorf.
Als $K = L$ is σ een automorfisme; het bekendste voorbeeld is het involutorisch automorfisme $\zeta \mapsto \bar{\zeta} = \operatorname{Re}\zeta - i \operatorname{Im}\zeta$ van C (complexe conjugatie).

Een afbeelding $A : R \to S$ heet <u>σ-$\frac{1}{2}$ lineair</u> als

(24) $$\begin{aligned}A(x+y) &= Ax + Ay\\ A(\lambda x) &= \sigma(\lambda)Ax\end{aligned} \quad \text{voor alle } x,y \in R,\ \lambda \in K,$$

waarin $\sigma : K \to L$ isomorf is. (Als $K = L$ en $\sigma = I_K$ is A lineair).
Voor de optelgroepen is $A : R^+ \to S^+$ homomorf. Evenals bij lineaire afbeeldingen geldt:
Het Beeld $AX \subset S$ van een lineaire deelruimte $X \subset R$, en het inverse beeld $\overset{-1}{A}Y \subset R$ van een lineaire deelruimte $Y \subset S$ zijn lineaire deelruimten.
Speciaal is $\operatorname{Ker} A = \overset{-1}{A}O \subset R$ een lineaire deelruimte, en A injectief $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker} A = O$.

Zij weer $e_1,\dots,e_n$ een basis van R, $f_1,\dots,f_m$ van S, en $Ae_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} f_i$, $(\alpha_{ij} \in L)$, dan heeft $x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j$, $(\xi_j \in K)$, als beeld

$$A\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \sigma(\xi_j) Ae_j = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\sigma(\xi_j)\right)f_i = \sum_{i=1}^{m} \sigma\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}\xi_j\right)f_i,$$

waarin $\beta_{ij} = \sigma^{-1}(\alpha_{ij})$.
We zien dat A in coördinaten zich laat ontbinden in

(25) $$(\alpha_{ij}) \circ \sigma^{(n)} : K^n \xrightarrow{\sigma^{(n)}} L^n \xrightarrow{(\alpha_{ij})} L^m,$$

waarin eerst het isomorfisme σ op elke coördinaat werkt: $\sigma^{(n)}\ulcorner\xi_1,\dots,\xi_n\urcorner = \ulcorner\sigma(\xi_1),\dots,\sigma(\xi_n)\urcorner$, en zo σ-$\frac{1}{2}$ lineair K^n in L^n

overvoert, gevolgd door de lineaire afbeelding met m × n-matrix $(\alpha_{ij}) : L^n \to L^m$. We kunnen ook ontbinden

(26) $\sigma^{(m)} \circ (\sigma^{-1}(\alpha_{ij})) : K^n \xrightarrow{(\beta_{ij})} K^m \xrightarrow{\sigma^{(m)}} L^m.$

Omdat de coördinaatsgewijs werkende σ bijectief is, geldt:

(27) A bijectief $\Leftrightarrow$ (α_{ij}) inverteerbaar.

De inverse A^{-1} krijgt in coördinaten de voorstellingen

(28) $\sigma^{-1(n)} \circ (\alpha_{ij})^{-1} : L^m \xrightarrow{(\alpha_{ij})^{-1}} L^n \xrightarrow{\sigma^{-1(n)}} K^n,$

$(\sigma^{-1}(\alpha_{ij}))^{-1} \circ \sigma^{-1(m)} : L^m \xrightarrow{\sigma^{-1(m)}} K^m \xrightarrow{(\beta_{ij})^{-1}} K^n.$

Zijn $A : R \to S$ en $B : S \to T$ resp. σ- en τ-½ lineair voor $\sigma : K \to L$ en $\tau : L \to M$, dan is $B \circ A : R \to T$ uiteraard $\tau\circ\sigma$-½ lineair voor $\tau\circ\sigma : K \to M$. Speciaal A^{-1} is σ^{-1}-½ lineair.

De ½ lineaire transformaties van een K-vectorruimte R vormen een groep $\Gamma L(R)$. Bij elke $A \in \Gamma L(R)$ hoort een automorfisme σ van K; deze vormen de automorfismengroep Aut K. De toevoeging $A \mapsto \sigma$ is een homomorfisme $\Gamma L(R) \to \text{Aut } K$ met kern GL(R) (de algemene lineaire groep, bestaande uit alle lineaire transformaties van R).

6. Uit een σ-½ lineaire $A : R \to S$ en een lineaire vorm $v : S \to L$ krijgen we door ook nog met σ^{-1} samen te stellen weer een lineaire vorm $\sigma^{-1} \circ v \circ A : R \to K$. De duale $A^* : S^* \to R^*$ is nu σ^{-1}-½ lineair:

(29) $A^*v = \sigma^{-1} \circ v \circ A$ voor $v \in S^*$, m.a.w.
$\langle A^*v|x \rangle = \sigma^{-1}(\langle v|Ax \rangle) \in K$ voor alle $x \in R$.

Hieruit blijkt $\langle A^*(\lambda v)|x \rangle = \sigma^{-1}(\langle \lambda v|Ax \rangle) = \sigma^{-1}(\lambda \langle v|Ax \rangle) =$
$= \sigma^{-1}(\lambda)\sigma(\langle v|Ax \rangle) = \sigma^{-1}(\lambda)\langle A^*v|x \rangle = \langle \sigma^{-1}(\lambda)A^*v|x \rangle$, dus
$A^*(\lambda v) = \sigma^{-1}(\lambda)A^*v$.
Bij compositie $B \circ A$ als boven wordt voor $w \in T^*$ nu
$(B \circ A)^*w = (\tau \circ \sigma)^{-1} \circ w \circ (B \circ A) = \sigma^{-1} \circ (\tau^{-1} \circ w \circ B) \circ A =$

$= \sigma^{-1} \circ B^*w \circ A = A^*(B^*w)$, dus weer

$$A^* \circ B^* = (B \circ A)^*,$$
$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

De duale $A^{**} : R^{**} \to S^{**}$ van $A^* : S^* \to R^*$ wordt gegeven door

$$A^{**}z = \sigma \circ z \circ A^* \text{ voor } z \in R^{**}, \text{ of}$$
$$< u|A^{**}z > = \sigma(< A^*u|z >) \in L \text{ voor alle } u \in S^*.$$

Voor eindig-dimensionale $R = R^{**}$ en $S = S^{**}$ is dit aequivalent met (25), dus weer $A^{**} = A$.

De σ-$\frac{1}{2}$ lineaire afbeelding $\sigma^{(n)} : K^n \to L^n$ heeft duale $\sigma^{(n)*} = \sigma^{-1(n)} : {}^nL \to {}^nK$, want

$$< \sigma^{-1(n)}\llcorner\mu_1,\dots,\mu_n\lrcorner|\ulcorner\xi_1,\dots,\xi_n\urcorner > = \sum_i\sigma^{-1}(\mu_i)\xi_i = \sigma^{-1}(\sum_i\mu_i\sigma(\xi_i)) =$$

$$\sigma^{-1}< \llcorner\mu_1,\dots,\mu_n\lrcorner|\sigma^{(n)}\ulcorner\xi_1,\dots,\xi_n\urcorner > \text{ voor } \llcorner\mu_1,\dots,\mu_n\lrcorner \in {}^nL,$$

$$\ulcorner\xi_1,\dots,\xi_n\urcorner \in K^n.$$

Bij een door (25) in coördinaten gegeven $A : R \to S$ krijgt $A^* : S^* \to R^*$ de voorstelling

(30) $\quad \sigma^{-1(n)} \circ (\alpha_{ij})^t = (\sigma^{-1}(\alpha_{ij}))^t \circ \sigma^{-1(m)},$

en $\quad A^{*-1} = A^{-1*} : R^* \to S^*$, die weer σ-$\frac{1}{2}$ lineair is.

(31) $\quad \sigma^{(m)} \circ (\sigma^{-1}(\alpha_{ij})^{-1t} = (\alpha_{ij})^{-1t} \circ \sigma^{(n)}$

(waarbij in R^* en S^* de coördinaten geschreven zijn als kolom-vectoren).

De homothetie $H_\lambda : R \mapsto R$, gedefinieerd door

(32) $\quad H_\lambda : x \to \lambda x$ voor $x \in R$

is duaal met de overeenkomstige homothetie $H^*_\lambda : R^* \to R^*$:

$< H^*_\lambda u|x > = < \lambda u|x > = < u|\lambda x > = < u|H_\lambda x>$.

Voor een σ-$\frac{1}{2}$ lineaire A is $A \circ H_\lambda = H_{\sigma(\lambda)} \circ A$ volgens (24) dus $\lambda A = H_\lambda \circ A$ heeft duale

(33) $\quad (\lambda A)^* = A^* \circ H^*_\lambda = \sigma^{-1}(\lambda)A^*.$

Opmerking 4.

Over een niet-commutatief lichaam K zijn de homothetieën H_λ en H_λ^* niet steeds lineair maar

$H_\lambda^*(\alpha u) = \lambda\alpha u = (\lambda\alpha\lambda^{-1})\lambda u = \theta_\lambda(\alpha)H_\lambda^* u$, waarin

$\theta_\lambda : \alpha \mapsto \lambda\alpha\lambda^{-1}$ een inwendig automorfisme van K is. Schrijven we in R scalairen rechts en in R^* links, dan is deze $H_\lambda^* : R^* \to R^*$ weer duaal met $H_\lambda : R \to R$, nu gedefinieerd door $H_\lambda : x \mapsto x$, die $\theta_{\lambda^{-1}}$-$\frac{1}{2}$ lineair is:

$H_\lambda(x\alpha) = x\alpha\lambda = x\lambda(\lambda^{-1}\alpha\lambda) = H_\lambda(x)\theta_{\lambda^{-1}}(\alpha)$,

$< H_\lambda^* u|x > = < \lambda u|x > = \lambda < u|x > \lambda\lambda^{-1} = \theta_\lambda < u|x\lambda > =$

$= (\theta_{\lambda^{-1}})^{-1}(< u|H_\lambda x >)$.

Overigens blijft de voorgaande theorie juist, waarbij we (30) en (31) moeten ontspiegelen als we in R^* scalairen links, afbeeldingen rechts, en de coördinaten als rijvectoren schrijven.

7. Een afbeelding $A : R \to S$ van de rechts-K-vectorruimte R naar de links-L-vectorruimte S heet <u>σ-antilineair</u> als

(34) $A(x+y) = A(x) + A(y)$, $A(x\lambda) = \sigma(\lambda)Ax$, voor alle $x,y \in R$, $\lambda \in K$,

waarin $\sigma : K \to L$ een anti-isomorfisme moet zijn, d.w.z.

(35) $\sigma(\lambda+\mu) = \sigma(\lambda) + \sigma(\mu)$, $\sigma(\lambda\mu) = \sigma(\mu)\sigma(\lambda)$, voor alle $\lambda,\mu \in K$.

Dit laatste dient opdat

$\sigma(\lambda\mu)Ax = A(x\lambda\mu) = \sigma(\mu)A(x\lambda) = \sigma(\lambda)\sigma(\mu)Ax$.

De eigenschappen van zo'n antilineaire afbeelding stemmen overeen met die van een $\frac{1}{2}$ lineaire. Bijvoorbeeld de duale $A^* : S^* \to R^*$ is σ^{-1}-antilineair: voor $v \in S^*$ (rechts-L-vectorruimte) geldt

(36) $< A^*v|x > = \sigma^{-1}(< Ax|v >) \in K$ voor alle $x \in R$.

Het verband tussen anti- en $\frac{1}{2}$ lineair kunnen we tot stand brengen door de volgende kunstgreep:

Zij K^t het lichaam dat we krijgen door in K een nieuwe vermenigvuldiging te definiëren door

(37) $\lambda\cdot\mu = \mu\lambda$

en de optelling te behouden. De afbeelding $\lambda \mapsto \lambda$ is nu een anti-isomorfisme $K \leftrightarrow K^t$.
Van de rechts-K-vectorruimte R maken we een links-K^t-vectorruimte R^t door de vectoren van R te nemen met de optelling van R (dus als additieve groep is $R^{t+} = R^+$), en voor de vermenigvuldiging met scalairen te stellen

(38) $\lambda x(\text{in } R^t) = x\lambda(\text{in } R)$.

Dan is $x \mapsto x$ een antilineaire bijectie $R \leftrightarrow R^t$:
$\lambda(\mu x) = (\lambda\cdot\mu)x = (\mu\lambda)x = x(\mu\lambda) = (x\mu)\lambda$.
Nu is de samengestelde afbeelding $R^t \to R \xrightarrow{A} S$ $\frac{1}{2}$-lineair bij het isomorfisme $K^t \to K \xrightarrow{\sigma} L$.

Voor een commutatief lichaam is $K^t = K$ en de identiteit I_K anti-isomorf: $\lambda\mu = \mu\lambda$. De verwisseling $R \leftrightarrow R^t$ krijgen we coördinaten te zien als zpiegelen

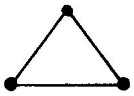
(39) $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \xleftrightarrow{t} (\xi_1 \ldots \xi_n)$, $K^{nt} = {}^nK$.

Het bekende anti-automorfisme van een scheeflichaam is de conjugatie $q \mapsto \overline{q}$ van het niet-commutatieve lichaam van de quaternionen $\mathbb{H}$, o.m. te verkrijgen als de complexe 2 × 2-matrices van de gedaante

(40) $q = \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$, $\overline{q} = \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & \overline{\beta} \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$.

Antwoorden en oplossingen.

1.1. (i) 1; (ii) 2.

1.3. (i)  ; (ii) .

2.1. (i) $\lceil 1,0,0\rceil$, $\lceil 0,1,0\rceil$, $\lceil 0,0,1\rceil$, $\lceil 0,1,1\rceil$, $\lceil 1,0,1\rceil$, $\lceil 1,1,0\rceil$, $\lceil 1,1,1\rceil$;
(ii) $\lceil 1,0,0\rceil$, $\lceil 0,1,0\rceil$, $\lceil 0,0,1\rceil$, $\lceil 0,1,1\rceil$, $\lceil 1,0,1\rceil$, $\lceil 1,1,0\rceil$, $\lceil 1,1,1\rceil$,
$\lceil 1,2,0\rceil$, $\lceil 0,1,2\rceil$, $\lceil 2,0,1\rceil$, $\lceil 2,1,1\rceil$, $\lceil 1,2,1\rceil$, $\lceil 1,1,2\rceil$.

2.3. (ii)

r,	p_1, p_2, p_3,	q_1, q_2, q_3,	u_1, u_2, u_3;
p_1,	p_2, p_3, r,	u_3, u_2, q_1,	q_3, q_2, u_1;
p_2,	p_1, p_3, r,	u_3, u_1, q_2,	q_3, q_1, u_2;
p_3,	p_1, p_2, r,	u_2, u_1, q_3,	q_2, q_1, u_3;
q_1,	q_2, q_3, r,	u_3, u_2, p_1,	p_1, p_2, u_1;
q_2,	q_1, q_3, r,	u_3, u_1, p_2,	p_3, p_1, u_2;
q_3,	q_1, q_2, r,	u_2, u_1, p_3,	p_2, p_1, u_3;
u_1,	p_2, q_2, u_3,	p_3, q_3, u_2,	q_1, p_1, r;
u_2,	p_1, q_1, u_3,	p_3, q_3, u_1,	q_2, p_2, r;
u_3,	p_1, q_1, u_2,	p_2, q_2, u_1,	q_3, p_3, r.

2.4. (ii) $\lceil 2,-7,3\rceil$.

2.5. $u_1 = \lceil 0,\beta-1,1-\gamma\rceil$, $u_2 = \lceil 1-\alpha,0,\gamma-1\rceil$, $u_3 = \lceil \alpha-1,1-\beta,0\rceil$.

3.4. (iii) $\lceil 1,0,0\rceil$, $\lceil 0,1,0\rceil$, $\lceil 0,0,1\rceil$; (iv) $\left\lceil\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\rceil$, $\left\lceil\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\right\rceil$

5.1. $e_0 = \ulcorner 1,0,1\urcorner$, $e_1 = \ulcorner 1,1,1\urcorner$, $e_2 = \ulcorner 2,1,-1\urcorner$.

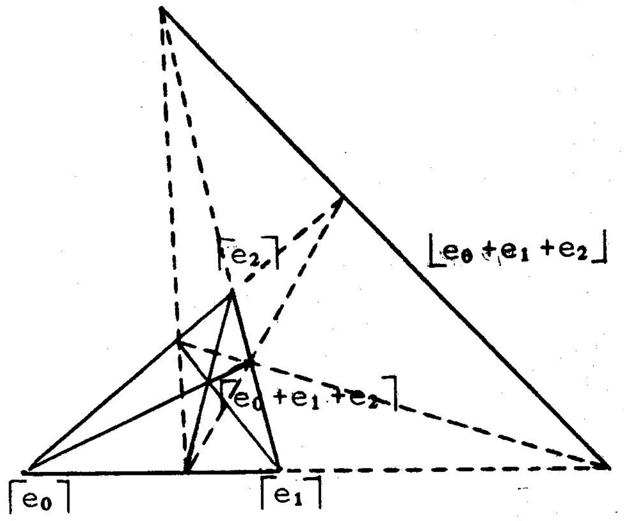
5.2. $\begin{pmatrix}4&1&-3\\0&-1&1\\-2&-1&1\end{pmatrix}$.

5.3. $r_1 = \lceil 1,1+\mu-\mu\lambda,1+\mu\rceil$, $r_2 = \lceil 1,\lambda,\lambda+\lambda\mu\rceil$, $r_3 = \lceil 0,1,1\rceil$.

5.5. $p = \lceil 1,1,0\rceil$, $q = \lceil 1,-1,0\rceil$, $p_2 = \lceil 1,0,1\rceil$, $p_4 = \lceil 0,1,1\rceil$,
$u = |1,2,1|$.

6.4. $\lfloor \alpha a + \beta b\rfloor$.

6.5.



6.6. (i) $\lfloor 1,-1,2 \rfloor$; (ii) $\lceil 1,-1,2 \rceil$.

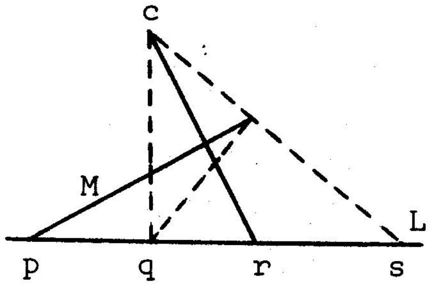
7.1. (i) $x \mapsto x + \xi_1 \ulcorner \alpha-1,0,0 \urcorner$; (ii) $x \mapsto x + \xi_2 \lceil \alpha,0,0 \rceil$.

7.2. $\begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 22 & -2 & -10 \\ 15 & 15 & -9 \end{pmatrix}$

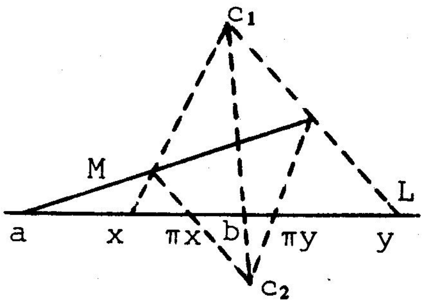
8.1. (ii) $\xi \mapsto \xi+\beta$; (iii) $\xi \mapsto \alpha\xi$; (iv) $\xi \mapsto \beta\xi^{-1}$.

8.2. (ii) $\pm\sqrt{\beta}$ voor $\xi \mapsto \beta\xi^{-1}$; (iii) $\xi \mapsto -\xi$.

8.3. (i) $\xi \mapsto \beta\xi^{-1}$; (ii)



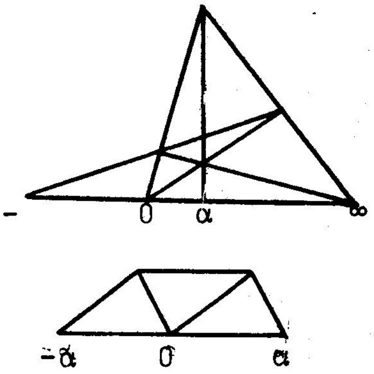
8.4.



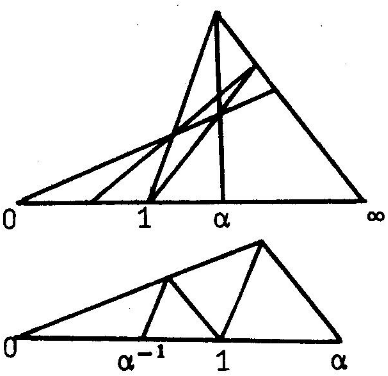
8.7.

(1)	,(12)(34)	,(13)(24)	,(14)(23)	:	ξ,
(24)	,(1234)	,(13)	,(1432)	:	ξ^{-1},
(34)	,(12)	,(1324)	,(1423)	:	$1-\xi$,
(234)	,(124)	,(132)	,(143)	:	$(1-\xi)^{-1}$,
(243)	,(123)	,(134)	,(142)	:	$1-\xi^{-1}$,
(23)	,(1243)	,(1342)	,(14)	:	$(1-\xi^{-1})^{-1}$.

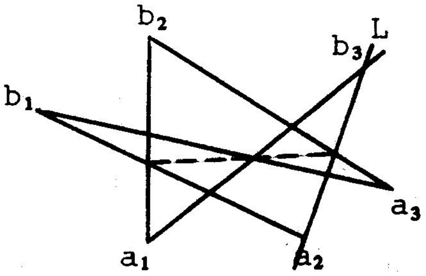
9.1.



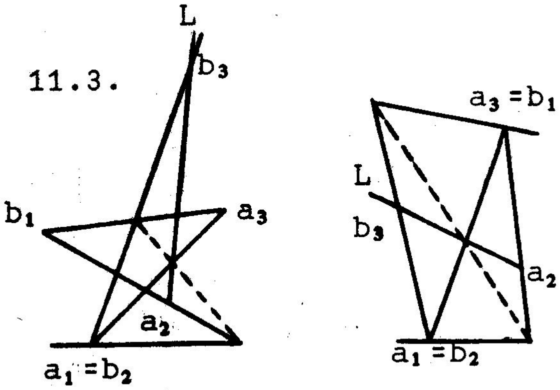
9.2.



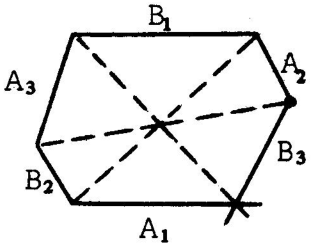
11.2



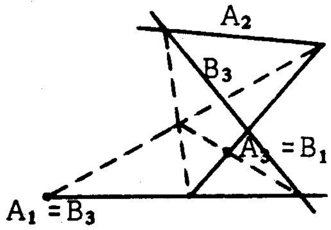
11.3.



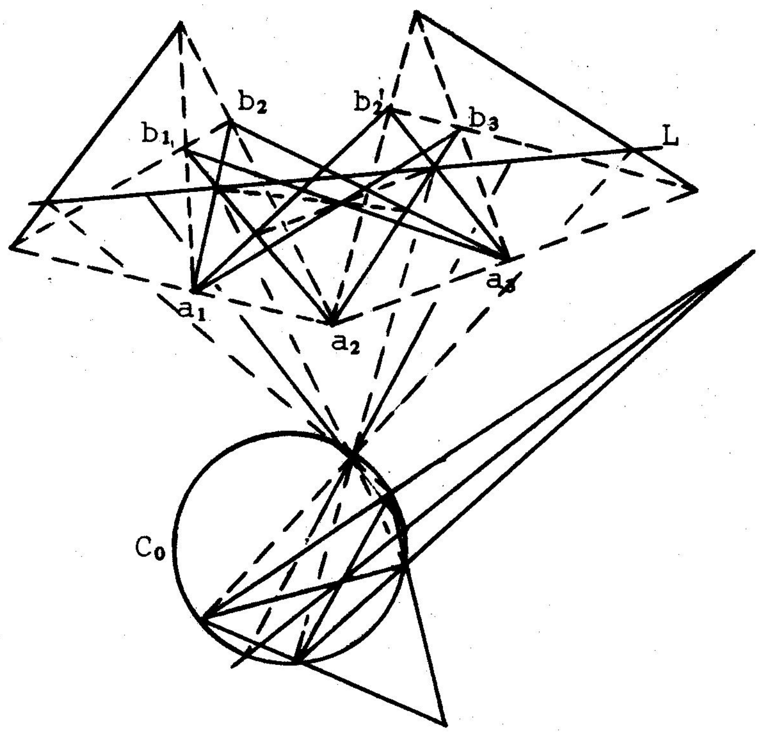
12.1.



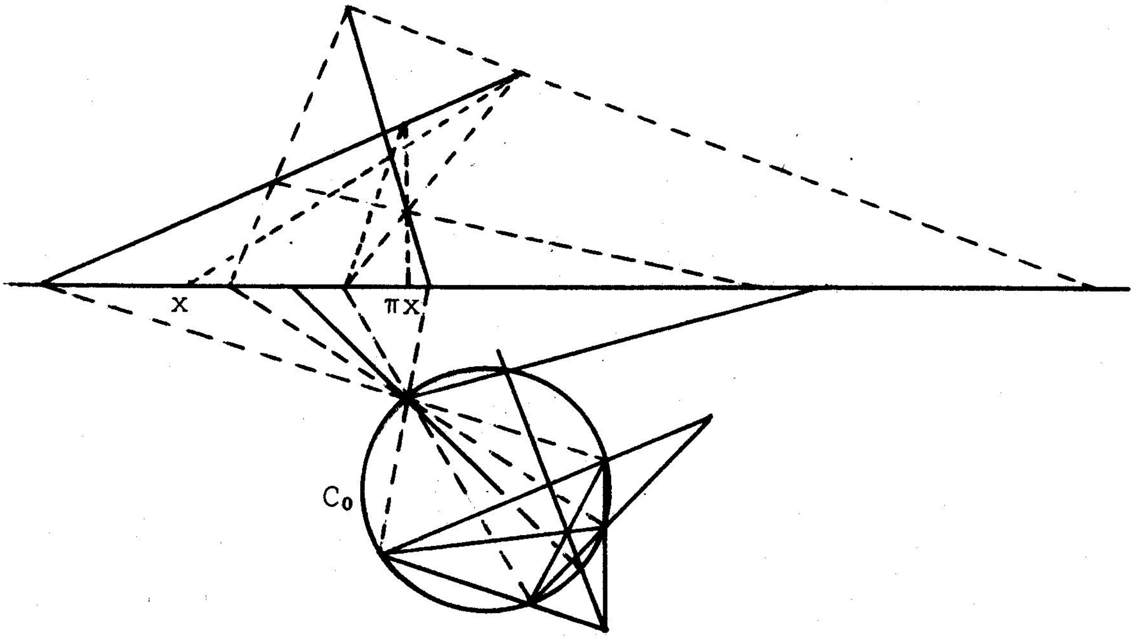
12.2.



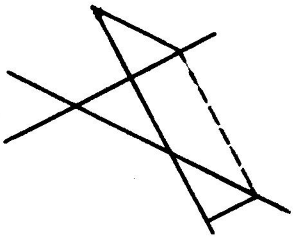
13.3.



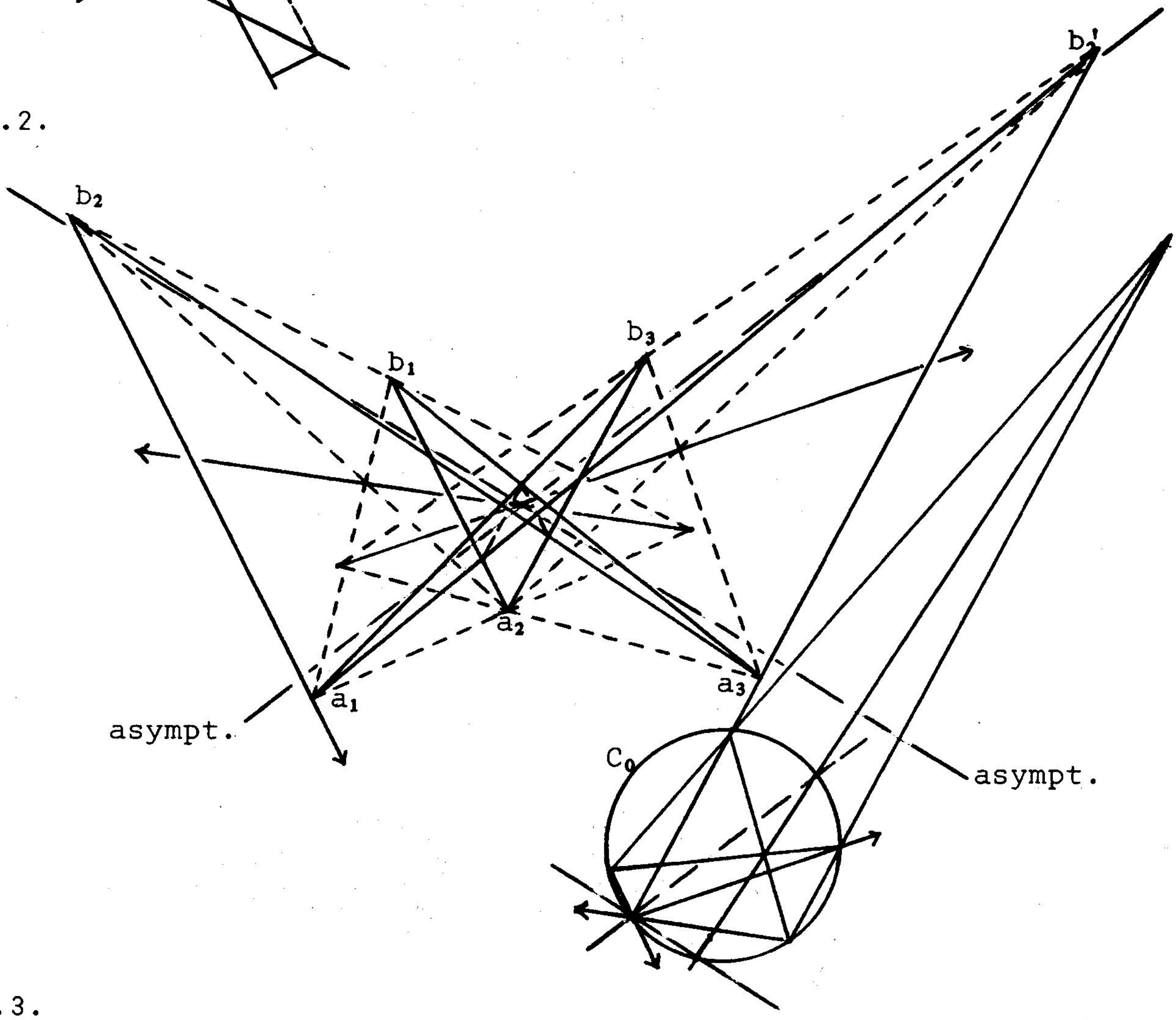
13.4.



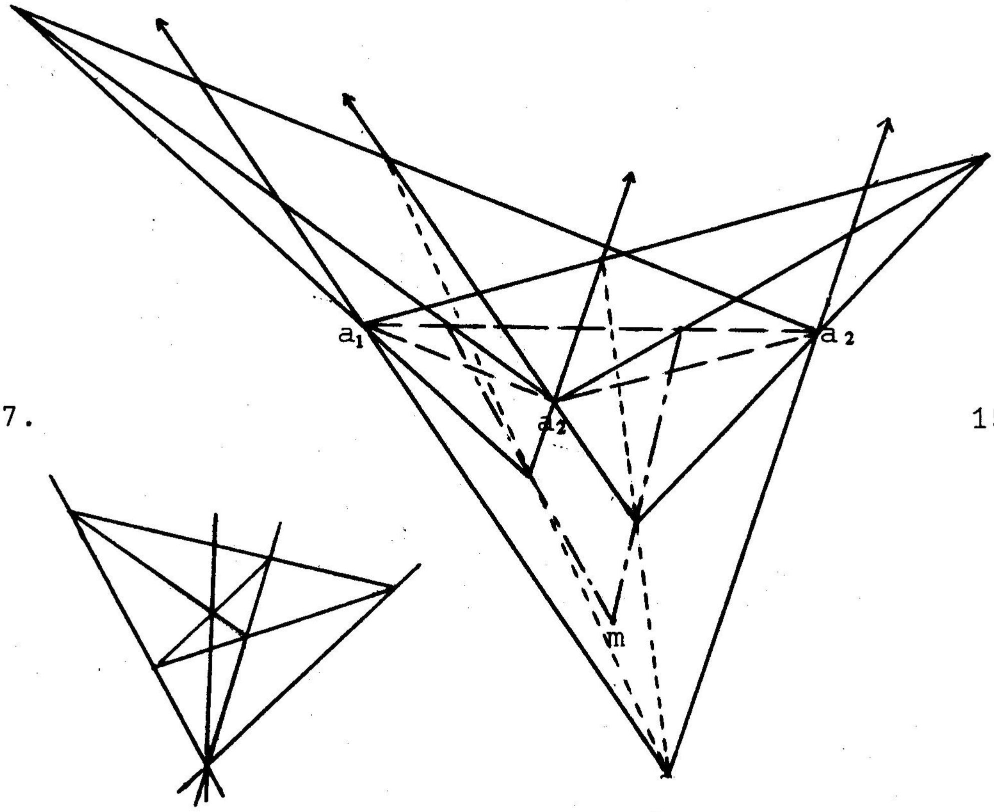
14.1.



14.2.



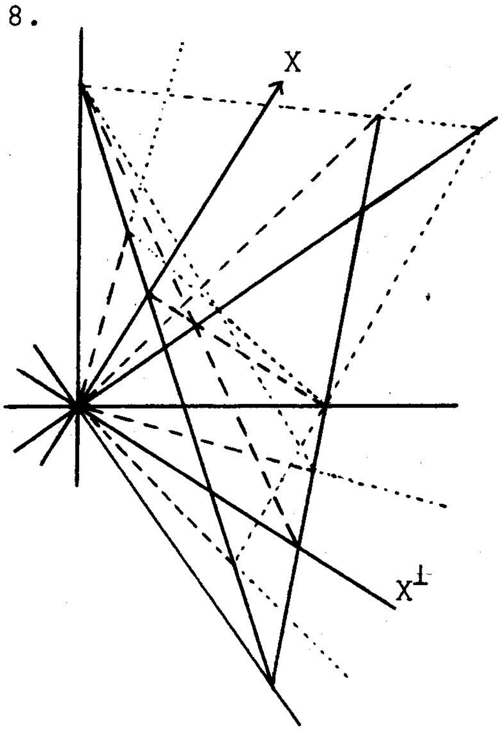
14.3.



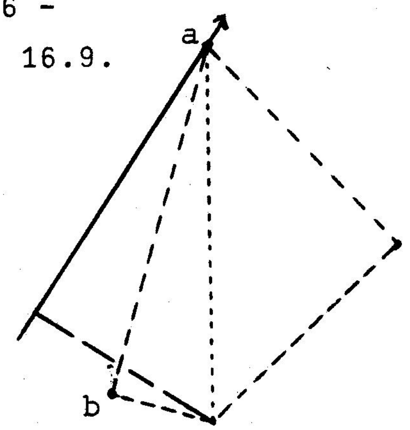
14.7.

15.2. $\lfloor 0,1,-1 \rfloor$.

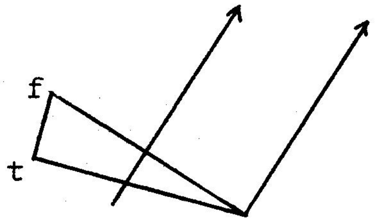
16.8.



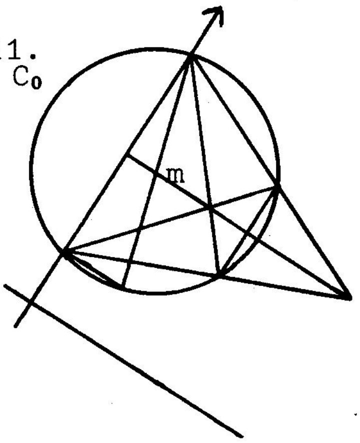
16.9.



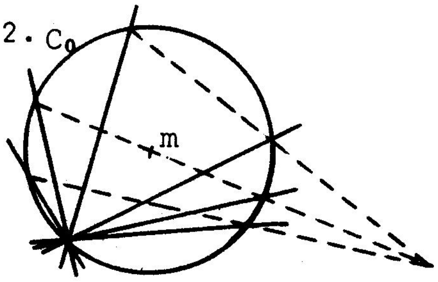
16.10.



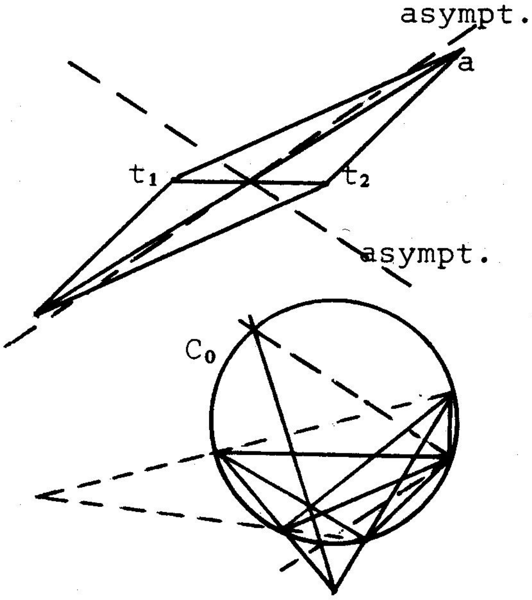
16.11.



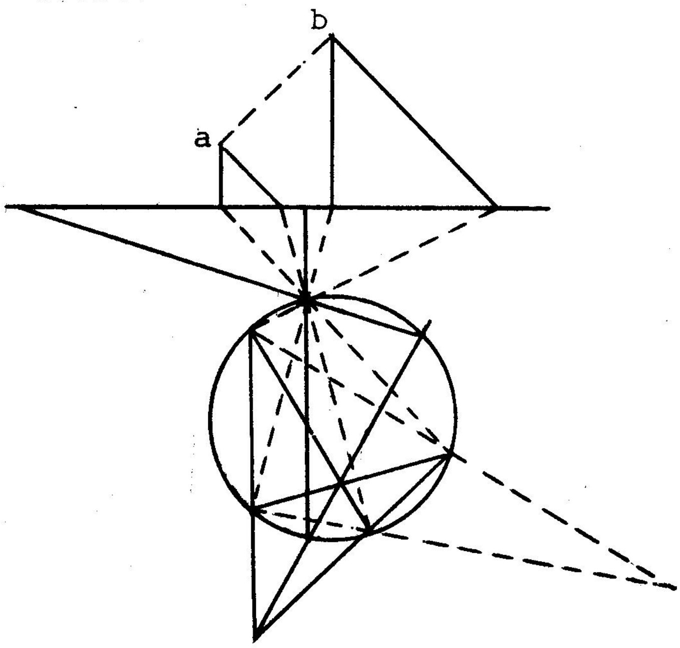
16.12.



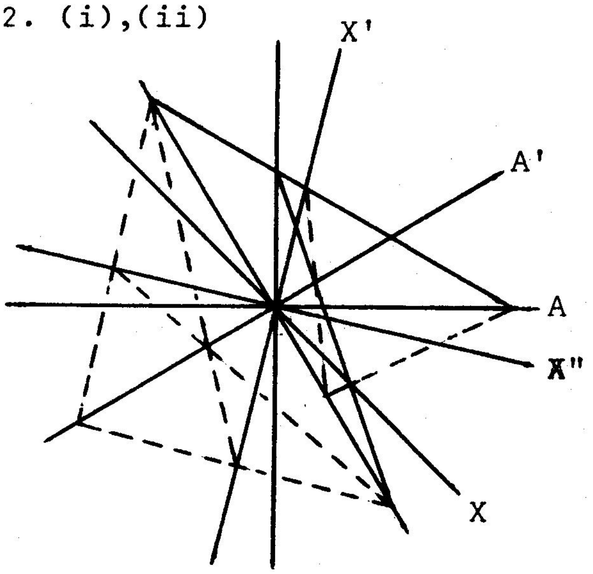
16.13.



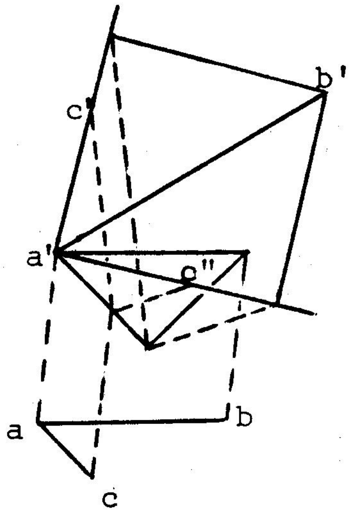
16.14.



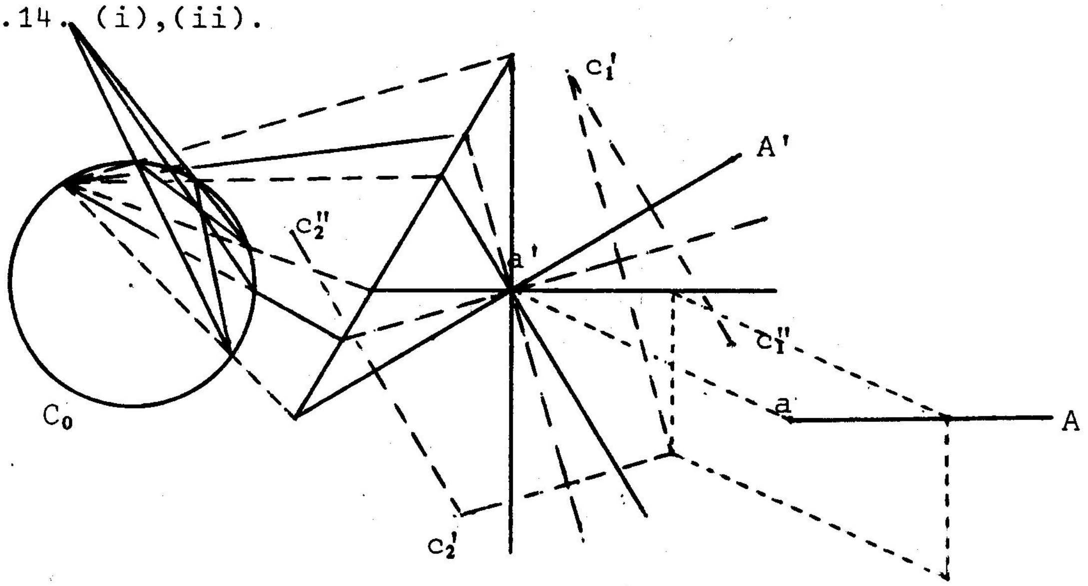
17.12. (i),(ii)



17.13. (i),(ii)



17.14. (i),(ii).



Tentamen Projectieve Meetkunde
11 mei 1974.

Schrijf uw naam en studierichting op ieder in te leveren vel.
Schrijf op de enveloppe uw naam en het adres waarheen de uitslag gezonden moet worden.
De vijf opgaven tellen ieder even zwaar.

1. Een projektiviteit van een lijn L op zichzelf wordt <u>parabolisch</u> genoemd als hij precies één vast punt heeft.
   Op L is een projektieve koördinaat gegeven; p is het punt met projektieve koördinaat 0.
   (i) Geef de algemene gedaante (formule) van parabolische projektiviteiten met vast punt p.
   (ii) Laten π en σ parabolische projektiviteiten zijn van L op L met vast punt p. Bewijs dat $\pi\sigma$ ófwel gelijk is aan de identitei ófwel weer een parabolische projektiviteit is met vast punt p.

2. Gegeven vijf onderling verschillende punten a,b,c,d en e in een projektief vlak over een lichaam met karakteristiek $\neq 2$. a, b en c liggen op een lijn L; c, d en e liggen op een lijn M, $L \neq M$.
   (i) Bewijs dat er een koördinatisering van het projektieve vlak is zodat

   $a = \ulcorner 0,1,0 \urcorner \quad b = \ulcorner 1,1,0 \urcorner \quad c = \ulcorner 1,0,0 \urcorner$

   $d = \ulcorner 1,0,1 \urcorner \quad e = \ulcorner 0,0,1 \urcorner$

   (ii) Teken in een figuur de punten a, b, c, d en e en konstrueer de lijn $\llcorner 1,1,1 \lrcorner$ (t.o.v. de koördinatisering bedoeld in (i)). Bewijs uw resultaat.

3. Bewijs dat de zwaartelijnen van een driehoek door één punt gaan. Dat wil zeggen: Laten a, b en c niet collineaire eigenlijke punten zijn in het reële affiene vlak. Het midden van ab is c', het midden van bc is a' en het midden van ca is b'. Bewijs dat $a \oplus a'$, $b \oplus b'$ en $c \oplus c'$ door één punt gaan.
   Aanwijzing: gebruik de stelling van Desargues.

4. We werken in het reële affiene vlak, dat zo gekoördinatiseerd is dat $L_\infty = \llcorner 1,0,0 \lrcorner$. K is een kegelsnede met vergelijking (in

z.o.z.

homogene koördinaten):

$$\xi_0^2 - \xi_1^2 - 2\xi_2^2 = 0.$$

Zoals u weet kan men van het affiene vlak een aequiform vlak maken door op L_∞ één elliptische involutie π_0 als "rechte hoeken involutie" aan te wijzen.
Hoe moet men π_0 kiezen opdat K in het aequiforme vlak een cirkel wordt? Wat zijn in dat geval de homogene koördinaten van de isotrope punten? Kies een projektieve koördinatisering op L_∞ en geef π_0 expliciet (in formule) aan t.o.v. deze koördinatisering.

5. C is een cirkel in het aequiforme vlak. m is het middelpunt van C; a en b zijn punten op C, en wel zó dat het snijpunt van de raaklijnen in a en b eigenlijk is. Noem dit snijpunt p.
Te bewijzen: $\angle(p \oplus a, p \oplus m) = \angle(p \oplus m, p \oplus b)$.
Aanwijzing: gebruik een slim gekozen aequiforme afbeelding.